

# Mouvement d'une bille magnétique dans le champ d'un aimant en rotation

N. Gayte , G. Ginot

Université de Strasbourg

May 23, 2016

Directeurs de stage : T. Charitat, J. Farago

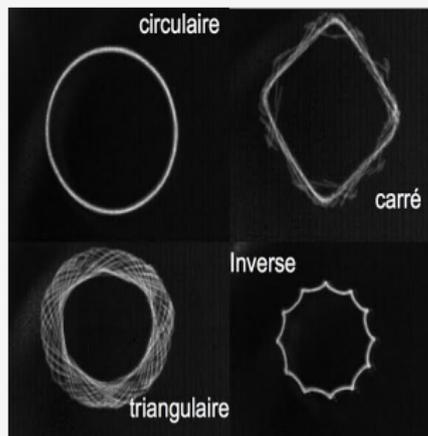


## Un problème simple en apparence...

- Un agitateur magnétique, composé d'un aimant permanent en rotation
- Une bille magnétique fortement aimantée
- *A priori*, la bille suit le mouvement de l'aimant en frottant sur le support

## ...mais aux propriétés surprenantes !

- $\omega \nearrow$ : trajectoire carrée, triangulaire... avant que la force centrifuge ne prenne le dessus et ne la fasse quitter le support.
- $\omega \nearrow \nearrow$ : la bille tourne à l'envers de la rotation du barreau.



**Pourquoi la bille tourne-t-elle dans l'autre sens ?**

Trajectoires pour différentes vitesses de rotation

- Énergie d'interaction :  
 $-\vec{m} \cdot \vec{B}$
- $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$
- $\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$

avec  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}^3|}(3(\vec{\mu} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\mu})$ .

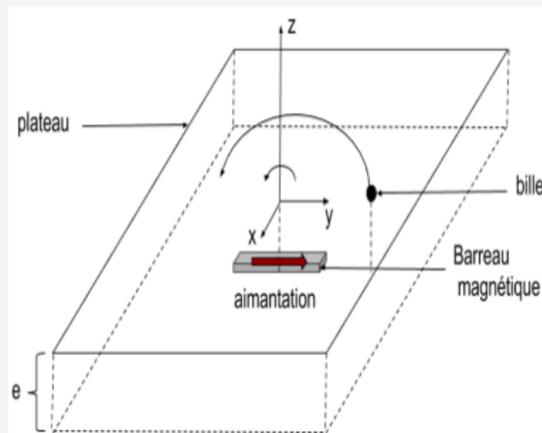


Schéma simplifié de l'expérience

# Une modélisation simplifiée pour avoir les grands traits du mouvement

**Hyp1:**  $\vec{F} = \vec{m}(\vec{\nabla}\vec{B}), \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r})$

L'action de l'aimant sur la bille s'approxime par un potentiel gaussien attractif

$$V = A \left( e^{-\frac{(x-x_{eq})^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(y-y_{eq})^2}{2\sigma_y^2}} + \epsilon e^{-\frac{(x+x_{eq})^2}{2\sigma_x^2}} e^{-\frac{(y+y_{eq})^2}{2\sigma_y^2}} \right)$$

$\epsilon$  valant 1 si le deuxième puits est attractif, -1 s'il est répulsif.

**Hyp2:** les frottements sont d'origine visqueuse ( $\vec{\gamma} = -\mu\vec{v}$ )

# Équation du mouvement et force effective

$$m\ddot{x} - m\omega^2x - 2m\omega\dot{y} = -\mu(\dot{x} - \omega y) - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} - m\omega^2y + 2m\omega\dot{x} = -\mu(\dot{y} + \omega x) - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_x = m\omega^2x + \mu\omega y - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = m\omega^2y - \mu\omega x - \frac{\partial V}{\partial y}$$

Équations différentielles couplées d'ordre 2 fortement non-linéaires

## Bille en présence d'un puits de potentiel

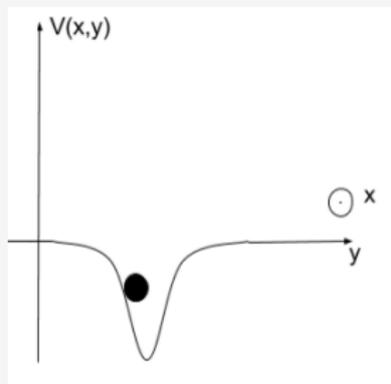


Schéma d'une bille dans un potentiel attractif.

**Le puits de potentiel est en rotation , avec  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$**

# Comportement analytique pour une faible vitesse de rotation

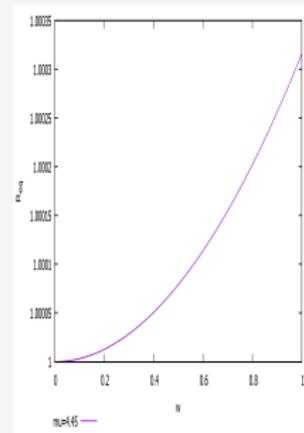
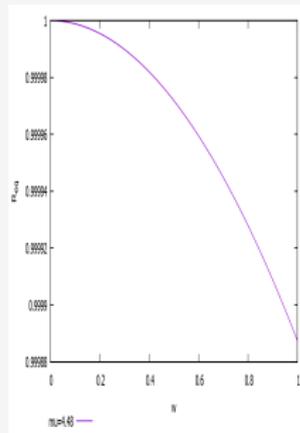
$\omega \ll 1 \Rightarrow$  bille proche de  $x_0$  et  $y_0$ .

Potentiel approximé par :

$$V \simeq -A \left( 1 - \frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right)$$

2 types de comportement liés par la relation :

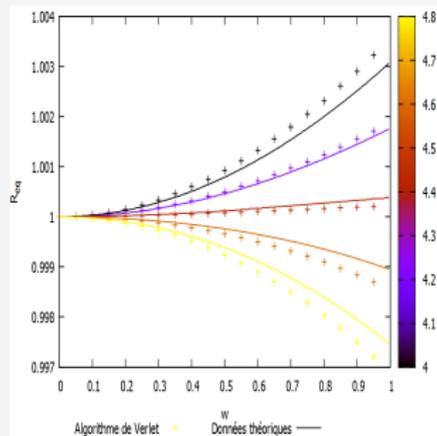
$$r^2 \simeq y_0^2 \left[ 1 + \frac{2m\sigma_0^2}{A} \left( 1 - \frac{\sigma_0^2 \mu^2}{2mA} \right) \omega^2 \right]$$



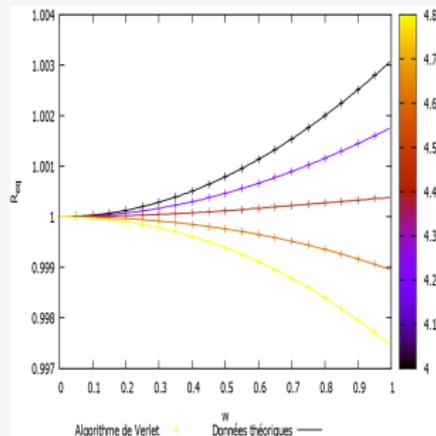
Réf. tournant  
 $\mu = 4.48$   
 $(x_0 = 0, y_0 = 1)$

Réf. tournant  
 $\mu = 4.45$   
 $(x_0 = 0, y_0 = 1)$

# Compétition entre les forces de frottement et d'entraînement



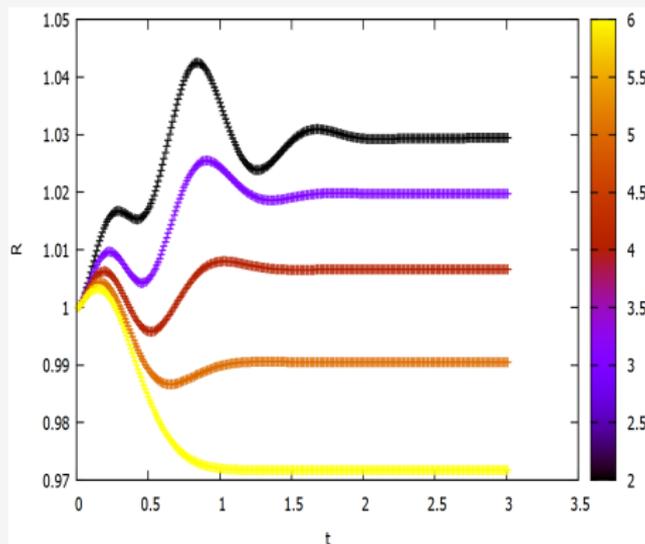
Eventail des lieux de points en fonction de  $\omega$  et  $\mu$  à faible  $t$



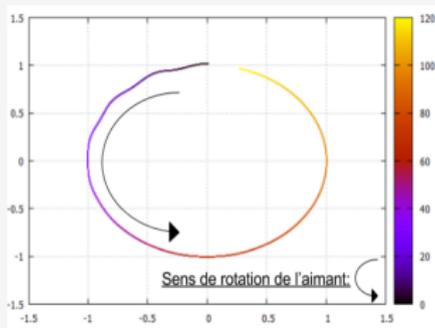
Eventail des lieux de points en fonction de  $\omega$  et  $\mu$  à grand  $t$

$$\chi = 1 - \frac{\|\vec{F}_f\|^2}{\|\vec{F}_m\| \|\vec{F}_e\|}$$

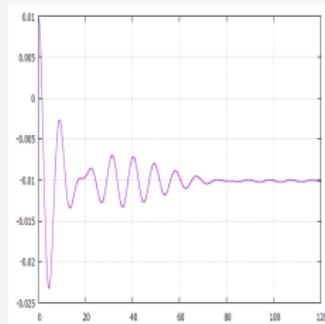
# Vitesse d'évolution de l'algorithme de Verlet



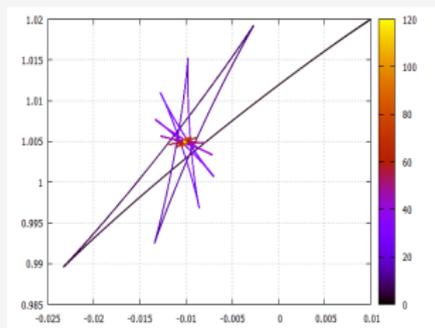
Évolution de la position de la bille au cours du temps avec  $\omega = 1.5$  en variant  $\mu$



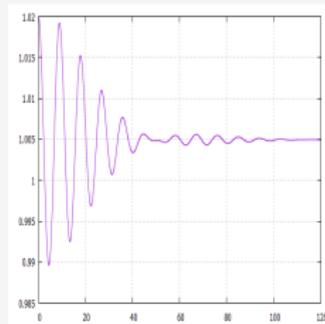
$\omega = 0.05, \mu = 0.2$ , référentiel fixe



$X(t)$



$\omega = 0.05, \mu = 0.2$ , référentiel tournant



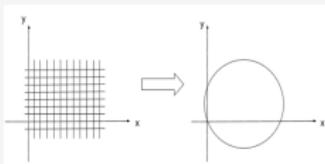
$Y(t)$

Recherche des positions d'équilibre pour  $\omega \geq 1$ 

En combinant les équations d'équilibre  $F(x)=F(y)=0$  pour **seul puits** **gaussien isotrope**:

$$\frac{(\nabla V)_x}{(\nabla V)_y} = \frac{m\omega^2 x + \mu\omega y}{m\omega^2 y - \mu\omega x} = \frac{\frac{x}{\sigma_x^2}}{\frac{(y-y_0)}{\sigma_y^2}}$$

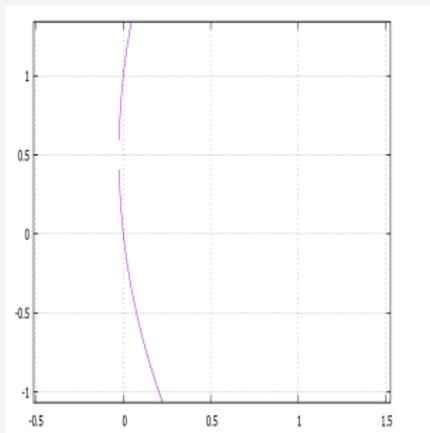
$$\left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\omega y_0 m}{\mu}\right)^2 = \frac{y_0^2}{4} + \left(\frac{\omega y_0 m}{\mu}\right)^2$$



Simplification de la recherche des positions d'équilibre

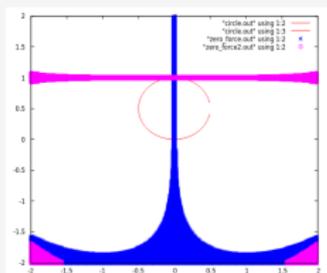
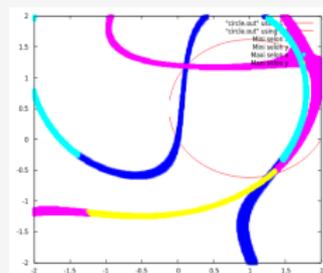
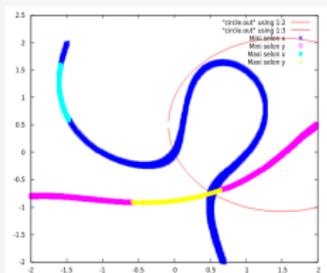
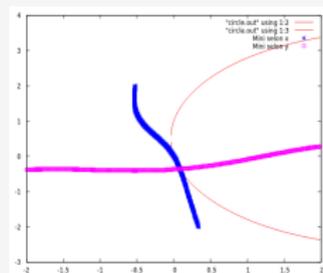
Évolution des coordonnées  $y$  en fonction de  $x$  :

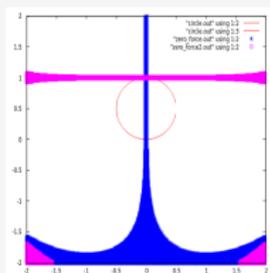
$$y = \frac{y_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{y_0^2 - 4\left(x^2 - x \frac{\omega y_0 m}{\mu}\right)}$$



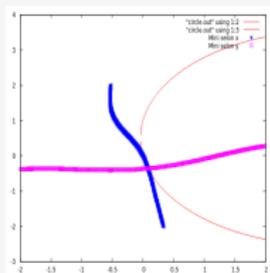
Portion de cercle pour  $\omega = 0.5$

## Évolution des positions d'équilibre

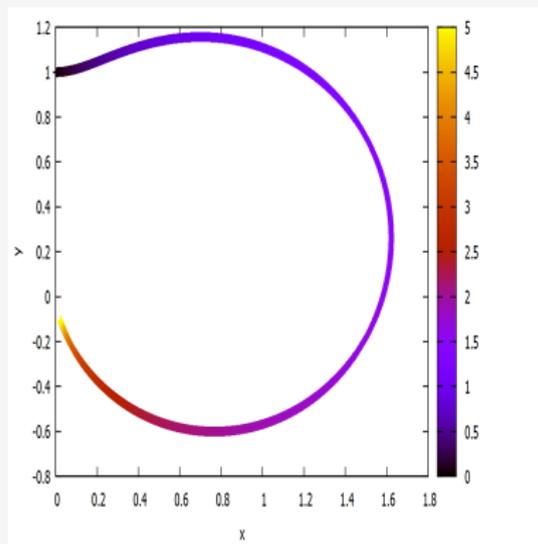
 $\omega=0$  $\omega=0.2$  $\omega=0.6$ 

Évolution des positions d'équilibre en fonction de  $\omega$ 

$$\omega = 0 \quad \mu = 0.2$$

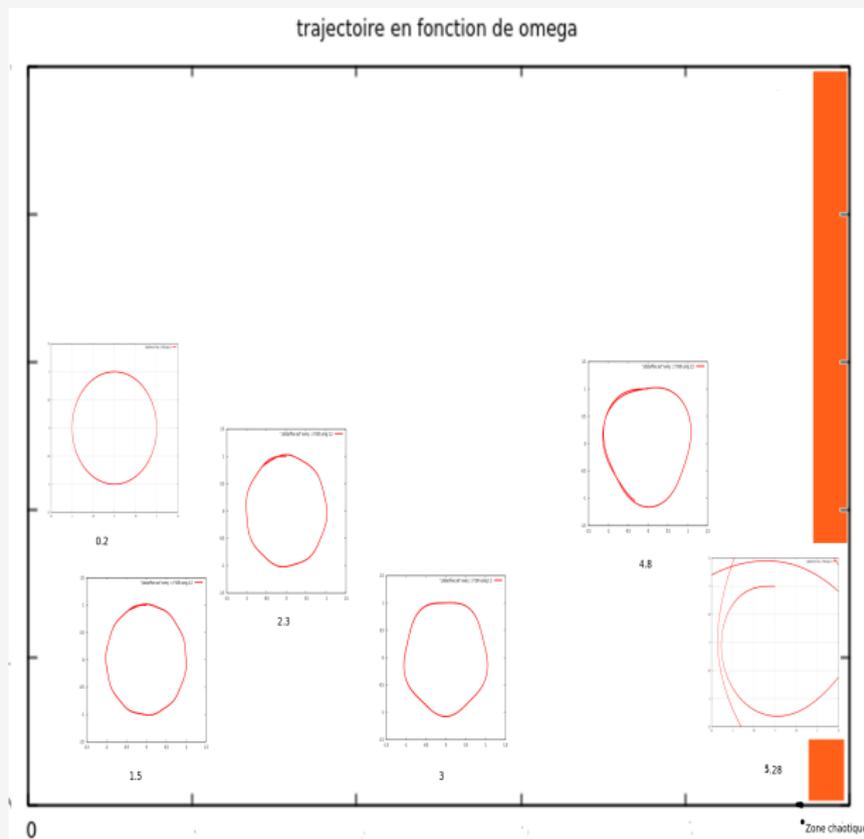


$$\omega = 3.7 \quad \mu = 0.2$$



Ensemble des positions d'équilibre en fonction de  $\omega$

## Formes exotiques



# Amélioration du modèle avec ajout de l'orientation de la bille

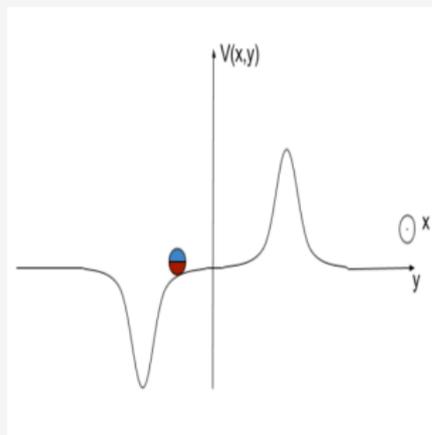


Schéma bille magnétique, cas 1

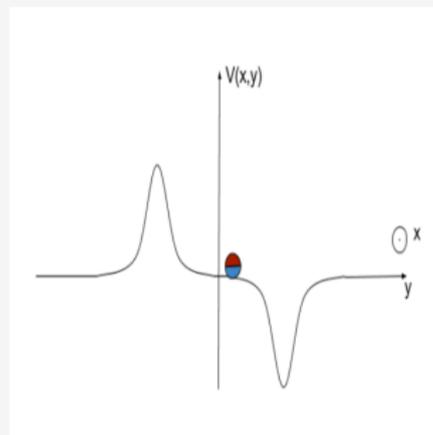


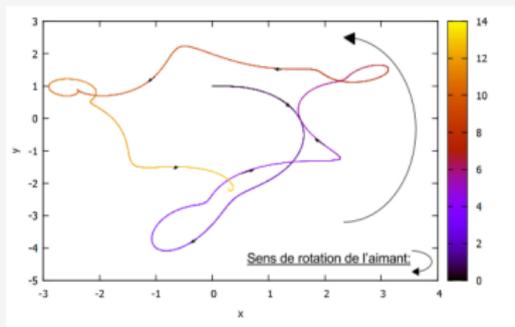
Schéma bille magnétique, cas 2

# Trajectoire inverse

Variation de son orientation:

$$\dot{s} = \frac{y}{y_0} \frac{1 - s^2}{\tau_s} \quad (1)$$

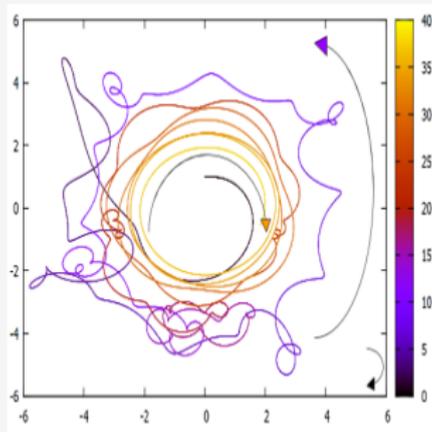
$\tau_s$ : temps de retournement de la bille.



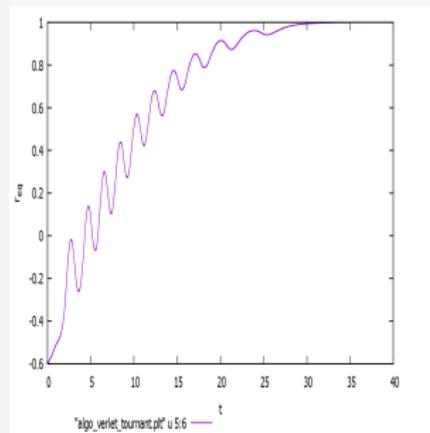
Trajectoire inverse dans le référentiel fixe

## Phénomène recherché mais transitoire...

Les paramètres clés qui peuvent influencer sur le sens de rotation de la bille sont  $\tau_s$  et  $s$  :



Trajectoire dans le référentiel fixe



Évolution de l'orientation de la bille au cours du temps

# Conclusion

## Modèle bille non-magnétique:

- 2 comportements distincts pour  $\omega \ll 1$
- Différents régimes mis en évidence.

## Modèle bille magnétique:

- Obtention de la trajectoire inverse sur un régime transitoire.
- Amélioration possible: ajout du potentiel et de l'inertie à l'orientation.

# Annexe : simulation numérique à l'aide de l'algorithme de Verlet

**Computer Simulation of Liquids**  
**(M.P.Allen et D.J.Tildesley)**  
**(page 78 – 81)**

$$\vec{r}(t + \delta t) = \vec{r}(t) + \delta t \vec{v}(t) + \frac{\delta t^2}{2} \vec{a}(t) \quad (2)$$

$$\vec{v}(t + dt) = \vec{v}(t) + \frac{\delta t}{2} (\vec{a}(t) + \vec{a}(t + dt)) \quad (3)$$

Problème: dans  $\mathfrak{R}^*(X, Y, Z)$ ,

$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}) + \vec{a}(\vec{v})$ . Le regroupement de  $\vec{v}(t + dt)$  donne une expression matricielle  $M\vec{v}(t + dt) = A = \vec{r}(t) + \frac{\delta t}{2} (\vec{a}(t) + \vec{a}(t, \vec{r}))$ , avec

$$\rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu \delta t}{2m} & -\omega \delta t \\ \omega \delta t & 1 + \frac{\mu \delta t}{2m} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t + dt) = \frac{1}{\det(M)} M^{-1} A \quad (4)$$