

→ Analyse dimensionnelle / ordres de grandeur

• t_0 $H_0 = 72 \text{ km/s/1pc}$ $[H_0] = \frac{L}{TL} = \frac{1}{T} \Rightarrow t_0 \sim \frac{1}{H_0}$

$H_0 = 72 \frac{10^3 \text{ m}}{\text{s} \cdot 3,27 \cdot 10^3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$ $= 2,33 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ $\Rightarrow t_0 \sim 13,6 \cdot 10^9 \text{ an}$ ($= t_0$ Planck)

($1 \text{ pc} = 3,27 \text{ AL}$ $1 \text{ AL} = c t_{10\text{an}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}{1 \text{ an}}$)

• ρ_c : $[\rho_c] = M L^{-3}$ gravitation : $[G] = \left[\frac{(F) \cdot m^2}{m m'} \cdot r^2 \right] = M^{-1} L^3 T^{-2} \Rightarrow [\rho] \sim \left[\frac{H_0^2}{G} \right]$

$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G} = 10^{-26} \text{ kg/m}^3 = 6 \text{ protons/m}^3$ ($\sim \frac{N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ P/g}}{6 \cdot 10^{29} \text{ P/m}^3} \cdot 1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ g}$ pour matière ordinaire)

• R_U : $v_{\text{exp}} = H_0 r \Rightarrow$ si $r \gg 1$ des $v_{\text{exp}} > c$: aucune info ne peut nous parvenir \Rightarrow Univers est fini

$v_{\text{exp}} = c$ pour $r = R_U$: Horizon cosmique de l'univers

$\Rightarrow c = H_0 R_U \Rightarrow R_U = \frac{c}{H_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,3 \cdot 10^{-18}} = 1,29 \cdot 10^{26} \text{ m} = 13,6 \cdot 10^9 \text{ AL}$

Quelle taille de l'univers (ou au moins), 1 observateur est au centre d'une sphère d'interaction de rayon R_U qui délimite l'univers observable classique

En fait, sans tenir compte de la dynamique des le cadre de la RG et du modèle Λ CDM des :

$R_U \rightarrow z \approx 1,5$, Horizon des événements $\approx 46 \cdot 10^9 \text{ AL}$ ($\approx 3,3 R_U$)

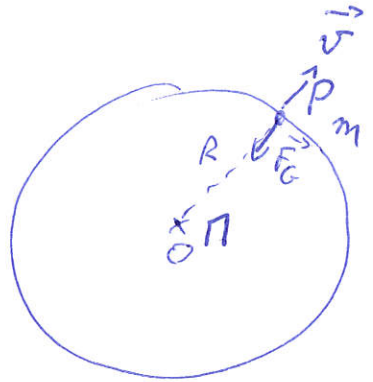
• $M_U = \rho_c \frac{4}{3} \pi R_U^3 = (8,67 \cdot 10^{53} \text{ kg}) \sim 5 \cdot 10^{79} \text{ protons}$

• $N_{g/U}$: $n_g \sim 10^{11} n_{\odot}$ $n_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \Rightarrow N_{g/U} \sim 3 \cdot 10^{11}$ (Rayons lumineux on en voit 10^5)

II Equations du fond Cosmologique

1) 1^{ere} equation de Friedman

• Raisonnement classique :



Galaxie en P, masse m, à la vitesse d'expansion: $v = HR$

et est soumise au potentiel gravitationnel de la sphère

de rayon R : $U = - \frac{GMm}{R}$ $\left(\vec{F}_G = - \frac{GMm}{r^2} \vec{u}_r \right)$ $dU = -dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{GMm}{r^2} dr$
 $U = \int \frac{GMm}{r^2} dr = - \frac{GMm}{r} + C_0$
 $U(r \rightarrow +\infty) = 0 = C_0$

La masse de la sphère de rayon R est $M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

$\Rightarrow U = - m G \frac{4}{3} \pi R^2 \rho$

L'énergie cinétique de la galaxie ~~est~~ ^{de masse m} est: $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m H^2 R^2$

L'énergie mécanique : $E_m = K + U = \frac{1}{2} m H^2 R^2 - m G \frac{4}{3} \pi \rho R^2$

F_G conservative, conservation de $E_m \Rightarrow E_m = d(-\frac{1}{2} m v^2)$

Choisissons le cas particulier $E_m = 0$ ($v_\infty = 0$) $\left\{ \begin{array}{l} E_m < 0 : \text{état lié} \Rightarrow \text{expansion puis contraction Big Crunch} \\ E_m > 0 : \text{état libre} \Rightarrow \text{expansion infinie} \end{array} \right.$

$\Rightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$

densité critique $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

si plusieurs fluides : $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i$

paramètres de densité : $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$

$1 = \sum \Omega_i = \Omega_m + \Omega_R + \Omega_k + \Omega_\Lambda + \Omega_k$
 $\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}$ $\Omega_R = \frac{\rho_R}{\rho_c}$ $\Omega_k = -\frac{3kc^2}{8\pi G \omega^2}$
 $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$ $\Omega_k = \frac{\rho_k}{\rho_c}$

Remarquons que: $v = \dot{R} = HR \Rightarrow H = \frac{\dot{R}}{R}$

\rightarrow si $E_m \neq 0 = -E$ alors $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \left(\frac{2E}{mR^2} \right) \sim \frac{1}{R^2}$: terme de courbure $\left\{ \begin{array}{l} E=0 : \text{cos. lité (plat)} \\ E>0 : \text{fermé (lité)} \\ E<0 : \text{ouvert (libre)} \end{array} \right.$

• Raisonnement RG : $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k c^2}{a^2 \theta} + \frac{\Lambda c^2}{3}$ \leftarrow constante cosmologique
 a : facteur d'échelle $R(t) = a(t)R_0$ $k=0$: plat $k=1$: sphérique $k=-1$: ouvert/hyperbolique

(II) Equations du fond cosmologique) suite

(3)

2°) Conservation de l'énergie

• Définition

Distribution de matière étant très diluée \rightarrow gaz (parfait) / fluide

propriétés: densité (en masse, masse volumique): ρ $[\rho] = \text{ML}^{-3}$

pression: P $[P] = \left[\frac{F=ma}{S} \right] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$

équation d'état: $P \equiv P(\rho, T)$ dépendance en T négligeable en cosmologie (pas dans l'Unité primordiale)

$$\Rightarrow P \equiv P(\rho)$$

Pour les fluides les + simples, ceux qui nous concernent, dit fluides "barotropiques"

$$w = \frac{P}{\rho c^2}$$

Matière: $w \sim \frac{v}{c} \rightarrow 0$
non relativiste

Radiation: $w = \frac{1}{3}$ (Pression de radiation)
(matière relativiste)

• Equation d'évolution de la densité:

~~Un~~ L'univers est rempli de façon homogène d'un fluide. L'univers est en expansion \Rightarrow au cours du temps le volume occupé par un certain nb d'éléments du fluide augmente \Rightarrow ce travail est effectué au niveau du fluide:

$$dW = P dV$$

\rightarrow raisonnement Energetique:

$$E_m = K + U \quad dE_m = dK + dU$$

$$\text{cons } E_m \Rightarrow dU = -dK = -dW = -PdV$$

\rightarrow raisonnement Thermodynamique:

$$dQ = dU + dW$$

Univers homogène \Rightarrow flux de chaleur identiques partout (pas de zone chaude ou froide)

$$\Rightarrow dQ = 0 : \text{processus adiabatique} \Rightarrow \boxed{dU = -dW = -PdV}$$

\rightarrow Raisonnement RG:

Relation de continuité de l'énergie-impulsion $\mathcal{D}_\mu T^{\mu\nu} = 0$

\Rightarrow m[^]e équation que cas classique!

\mathcal{D}_μ : dérivée covariante

$T^{\mu\nu}$: tenseur énergie-impulsion

Considérons un volume élémentaire de type sphérique (cf. de respecter les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité)

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow dV = 4\pi R^2 dR \Rightarrow \dot{V} = 4\pi R^2 \dot{R}$$

$$\text{or } dW = P dV \Rightarrow \dot{W} = P \dot{V} = 4\pi R^2 P \dot{R}$$

$$\text{et } dU = -P dV \Rightarrow \dot{U} = -P \dot{V} = -4\pi R^2 P \dot{R}$$

$$\text{or } U = mc^2 = \rho V c^2 = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 c^2$$

$$\Rightarrow \dot{U} = \dot{\rho} \frac{4}{3} \pi R^3 c^2 + \rho 4\pi R^2 c^2 \dot{R} = -4\pi R^2 P \dot{R}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \rho (1+w) = 0}$$

$$\text{or } H = \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + 3H \rho (1+w) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3H(1+w) = \frac{d \ln \rho}{dt} \Rightarrow d \ln \rho = -3(1+w) H dt$$

⇒ PAUSE car on ne connaît pas H(t) ?

$$\text{or } H dt = d \ln a = -d \ln x = -d \ln(1+z) \quad \left(x = 1+z = \frac{a_0}{a} \right)$$

$$\Rightarrow d \ln \rho = 3(1+w) d \ln x = 3 d \ln x + 3w d \ln x$$

$$\Rightarrow \ln \rho = \int 3(1+w) d \ln x + d \Rightarrow \rho(z) = \rho_0 e^{\int_1^{1+z} 3(1+w) d \ln x}$$

$$\rho(z) = \rho_0 e^{\int_1^{1+z} 3 d \ln x} e^{\int_1^{1+z} 3w d \ln x} = \rho_0 (1+z)^3 e^{\int_1^{1+z} 3w d \ln x}$$

$$= \rho_0 (1+z)^3 e^{\int_1^{1+z} 3w \frac{dx}{x}}$$

$$= \rho_0 (1+z)^3 e^{\int_1^{1+z} 3w \frac{dx}{x}}$$

$$= \rho_0 (1+z)^3 e^{\int_1^{1+z} 3w \frac{dx}{x}}$$

$$= \rho_0 (1+z)^3 e^{\int_1^{1+z} 3w \frac{dx}{x}}$$

matrice non relativiste: $w=0 \Rightarrow \rho(z) = \rho_0 (1+z)^3 \sim a^{-3}$

radiation: $w = 1/3 \Rightarrow \rho(z) = \rho_0 (1+z)^4 \sim a^{-4}$

cocubane: $w = -1/3 \Rightarrow \rho(z) = \rho_0 (1+z)^2 \sim a^{-2}$

Λ: $w = -1 \Rightarrow \rho(z) = \rho_0$

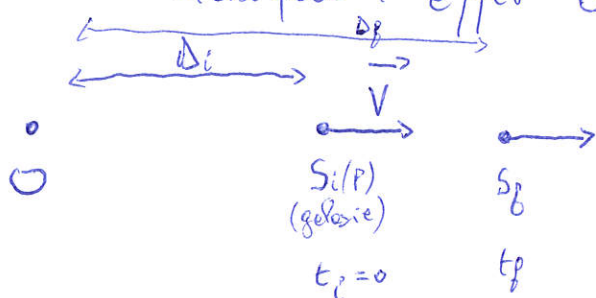
3) Redshift ou décalage vers le rouge :

Ce qu'on mesure c'est un décalage vers le rouge des longueurs d'ondes de la lumière reçue par les étoiles des galaxies

Spectre atomique ont des λ caractéristiques : $\lambda_E = \lambda(t_E)$

On les reçoit avec un décalage : $\lambda_R = \lambda_0 = \lambda(t_0)$ $t_0 =$ aujourd'hui

• Interprétation classique : effet Doppler



onde se déplace à la vitesse c

Source:

$t_i = 0$: émission du début du signal périodique, S_i est à la position D_i

$t_f = T_E$: émission de la fin du signal périodique, S_f est $\text{---} D_f$

source se déplace à la vitesse $V \Rightarrow D_f = D_i + V T_E$

Récepteur:

début signal reçu à $t_{Ri} = \frac{D_i}{c}$

fin $t_{Rf} = T_E + \frac{D_f}{c} = \frac{D_i}{c} + T_E \frac{V}{c} + T_E = T_E \left(1 + \frac{V}{c}\right) + \frac{D_i}{c}$

la période au récepteur du signal périodique vaut : $T_R = t_{Rf} - t_{Ri} = T_E \left(1 + \frac{V}{c}\right)$

Longueur d'onde:

Par définition $\lambda = cT \Rightarrow \frac{\lambda_R}{\lambda_E} = \frac{T_R}{T_E} = 1 + \frac{V}{c} \equiv 1+z \Rightarrow \boxed{z = \frac{V}{c}}$



cette relation est fautive dans le cas relativiste

en effet si $V=c$ ($R=R_v$ classique) alors $z=1$ et par vent on voit des objets avec $z > 1$ \Rightarrow relation correcte uniquement si $V \ll c$

$(V \ll \frac{c}{10})$

• Définition z :

$\boxed{1+z = \frac{\lambda_R}{\lambda_E}}$

• z et facteur d'échelle $a(t)$

t_0 : On définit $t_0 = \text{aujourd'hui } (= t_0)$

t est le temps dans le passé, $t=0$: début de l'Univers

$a(t)$: facteur d'échelle tel que: $R(t) = a(t) R_0$

(on peut voir $R_0 = R_0$ où $v_{exp} = c$, mais cette relation est vraie pour les longueurs dites "comobiles" $\# \rightarrow \#$)

Par définition: $R(t_0) = R_0 = a(t_0) R_0 = a_0 R_0 \Rightarrow a_0 = 1$

$a(t)$: représente le facteur de dilatation de l'espace due à l'expansion de l'Univers

Re: en fait de "contraction" vu qu'on regarde dans le passé, en effet $a(t=0) = 0$ et $a_0 = 1 \Rightarrow 0 < a \leq 1$

→ Lien entre z et $a(t)$:

Un photon reçu aujourd'hui possède une longueur d'onde λ_0 : $\lambda_0 = c T_0 = c T_R$

Ce photon a été émis au temps t avec $\lambda = c T_E = \lambda_E$

Par définition de $a(t)$ ces longueurs sont reliées par: $\lambda(t) = a(t) \lambda_0$

La définition de $z \Rightarrow 1+z = \frac{\lambda_R}{\lambda_E} = \frac{\lambda_0}{\lambda_E} = \frac{1}{a}$

• Lien entre le temps, H , a et z :

$$R = a R_0 \Rightarrow \dot{R} = \dot{a} R_0 \Rightarrow H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{a dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d \ln a}{dt} = H}$$

$$x = 1+z = \frac{1}{a} \Rightarrow dx = d(1+z) = -\frac{da}{a^2} = -\frac{1}{a} da = -x H dt \Rightarrow \boxed{d \ln x = H dt = -dx/x}$$

↳ on peut à présent calculer les $\rho(z)$ et $H(z)$ (→ retour p(4))

4°) 2^{nde} équation de Friedman et paramètre de décélération

Le 2nd éq de Friedman est associée à \ddot{a} ou + précisément à $\frac{\ddot{a}}{a}$

\Rightarrow on derive # à t la 1^{re} éq de Friedman:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho} = - \frac{4\pi G}{3} \lambda (\rho + \frac{p}{c^2})$$

équation de continuité

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = H^2 - 4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \frac{8\pi G}{3} \rho - 4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = -4\pi G \left[\rho \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{p}{c^2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) = -\frac{4\pi G}{3} \rho (1+3w)$$

On définit le paramètre de décélération par: $[q] = 1$

$$q(z) = -\frac{\ddot{a}}{a H^2} = \frac{4\pi G \rho}{3 H^2} (1+3w)$$

\Rightarrow L'univers décélère si $q < 0 \Rightarrow 1+3w < 0 \Rightarrow \boxed{w < -1/3}$

C'est la propriété de base de l'énergie noire! (: fluide tq $w < -1/3$)

La constante cosmologique possède cette propriété: $w = -1$

5°) Distances et observable:

Les mesures donnent accès à z et aux Ω_i et $H_0 \Rightarrow$ on reformule 1^{re} éq de Friedman

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \Omega_i^0 \rho_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)} \quad \rho_i^0 = H_0^2 \sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)} \Rightarrow E(z) = \frac{H(z)}{H_0} = \sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}$$

et $\rho_i(z) = \rho_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)} = \rho_i^0 \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}$ $\Rightarrow E(z) = \Omega_R^0 (1+z)^4 + \Omega_m^0 (1+z)^3 + \Omega_k^0 (1+z)^2 + \Omega_\Lambda + \Omega_X (1+z)^{3(1+w_X)}$

En RB les distances sont proportionnelles à: $\frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}$