

Collection Savoirs Pratiques
L1

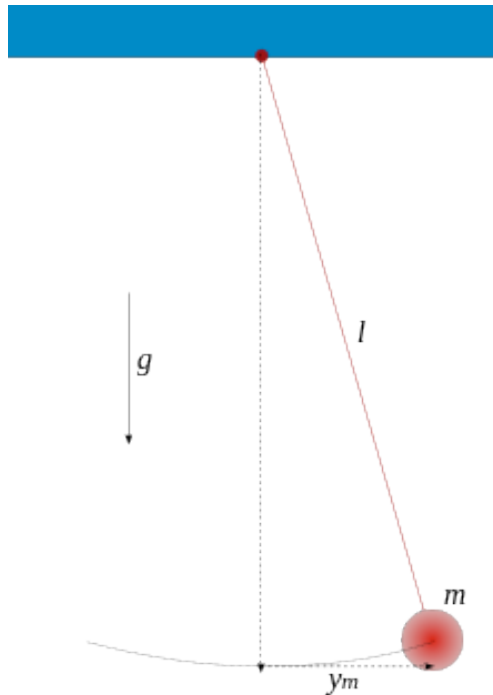
Calcul de la moyenne et de l'écart type d'une série de mesure



Juin 2014

Mesure de la période d'un pendule

Vous avez construit un pendule avec un fil de longueur l et une masse m

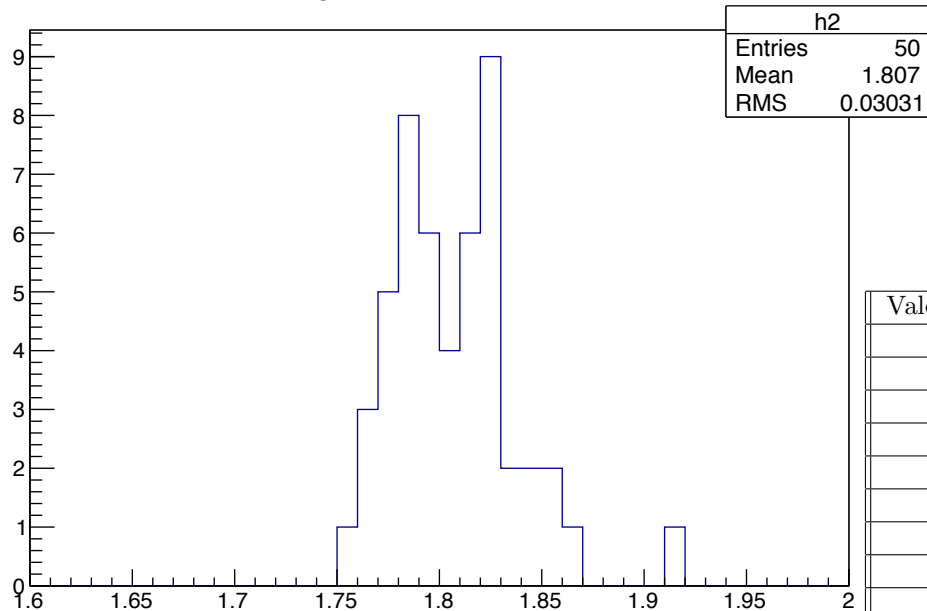


Vous en mesurez la période plusieurs fois.

Qu'annoncez-vous comme résultat de mesure ?

Num. mesure	Période du pendule	Num. mesure	Période du pendule
1	1.91416	2	1.78052
3	1.79275	4	1.85855
5	1.78800	6	1.80887
7	1.86166	8	1.82970
9	1.81302	10	1.82930
11	1.83118	12	1.82226
13	1.79560	14	1.83572
15	1.81148	16	1.78121
17	1.80816	18	1.80180
19	1.78700	20	1.78614
21	1.75372	22	1.79709
23	1.78412	24	1.85760
25	1.81605	26	1.84816
27	1.82283	28	1.80990
29	1.81458	30	1.78280
31	1.79397	32	1.77436
33	1.76408	34	1.82141
35	1.82797	36	1.82052
37	1.82694	38	1.77148
39	1.82567	40	1.77285
41	1.77610	42	1.81018
43	1.78558	44	1.79330
45	1.76848	46	1.77594
47	1.81357	48	1.76831
49	1.79359	50	1.84706

Histogramme des mesures

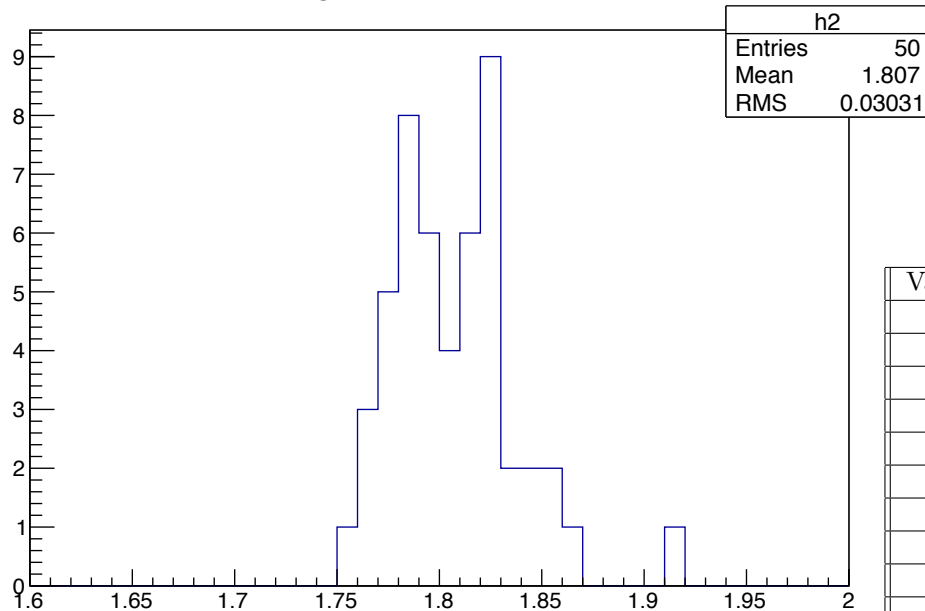


40 intervalles entre 1.6 s et 2.0 s dans lesquels on compte le nombre de mesure dans chacun d'eux

Valeur centrale du bin	Effectif du bin	Valeur centrale du bin	Effectif du bin
1.60500	0.00000	1.61500	0.00000
1.62500	0.00000	1.63500	0.00000
1.64500	0.00000	1.65500	0.00000
1.66500	0.00000	1.67500	0.00000
1.68500	0.00000	1.69500	0.00000
1.70500	0.00000	1.71500	0.00000
1.72500	0.00000	1.73500	0.00000
1.74500	0.00000	1.75500	1.00000
1.76500	3.00000	1.77500	5.00000
1.78500	8.00000	1.79500	6.00000
1.80500	4.00000	1.81500	6.00000
1.82500	9.00000	1.83500	2.00000
1.84500	2.00000	1.85500	2.00000
1.86500	1.00000	1.87500	0.00000
1.88500	0.00000	1.89500	0.00000
1.90500	0.00000	1.91500	1.00000
1.92500	0.00000	1.93500	0.00000
1.94500	0.00000	1.95500	0.00000
1.96500	0.00000	1.97500	0.00000
1.98500	0.00000	1.99500	0.00000

Num. mesure	Période du pendule	Num. mesure	Période du pendule
1	1.91416	2	1.78052
3	1.79275	4	1.85855
5	1.78800	6	1.80887
7	1.86166	8	1.82970
9	1.81302	10	1.82930
11	1.83118	12	1.82226
13	1.79560	14	1.83572
15	1.81148	16	1.78121
17	1.80816	18	1.80180
19	1.78700	20	1.78614
21	1.75372	22	1.79709
23	1.78412	24	1.85760
25	1.81605	26	1.84816
27	1.82283	28	1.80990
29	1.81458	30	1.78280
31	1.79397	32	1.77436
33	1.76408	34	1.82141
35	1.82797	36	1.82052
37	1.82694	38	1.77148
39	1.82567	40	1.77285
41	1.77610	42	1.81018
43	1.78558	44	1.79330
45	1.76848	46	1.77594
47	1.81357	48	1.76831
49	1.79359	50	1.84706

Histogramme des mesures



h2	
Entries	50
Mean	1.807
RMS	0.03031

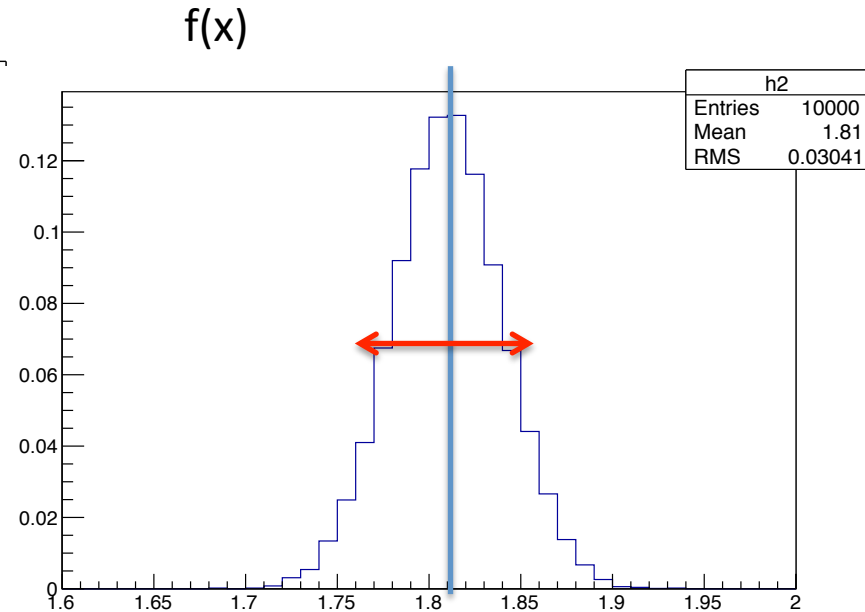
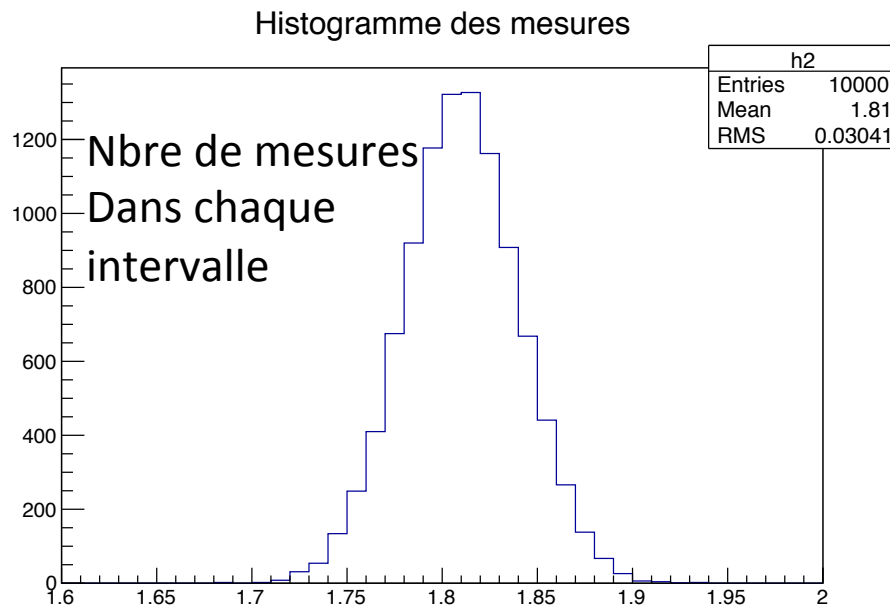
40 intervalles entre 1.6 s et 2.0 s dans lesquels on compte le nombre de mesure dans chacun d'eux

Valeur centrale du bin	Effectif du bin	Valeur centrale du bin	Effectif du bin
1.60500	0.00000	1.61500	0.00000
1.62500	0.00000	1.63500	0.00000
1.64500	0.00000	1.65500	0.00000
1.66500	0.00000	1.67500	0.00000
1.68500	0.00000	1.69500	0.00000
1.70500	0.00000	1.71500	0.00000
1.72500	0.00000	1.73500	0.00000
1.74500	0.00000	1.75500	1.00000
1.76500	3.00000	1.77500	5.00000
1.78500	8.00000	1.79500	6.00000
1.80500	4.00000	1.81500	6.00000
1.82500	9.00000	1.83500	2.00000
1.84500	2.00000	1.85500	2.00000
1.86500	1.00000	1.87500	0.00000
1.88500	0.00000	1.89500	0.00000
1.90500	0.00000	1.91500	1.00000
1.92500	0.00000	1.93500	0.00000
1.94500	0.00000	1.95500	0.00000
1.96500	0.00000	1.97500	0.00000
1.98500	0.00000	1.99500	0.00000
2.00500	0.00000	2.01500	0.00000

Num. mesure	Période du pendule	Num. mesure	Période du pendule
1	1.91416	2	1.78052
3	1.79275	4	1.85855
5	1.78800	6	1.80887
7	1.86166	8	1.82970
9			
11			
13			
15			
17			
19			
21			
23			
25			
27			
29			
31			
33			
35			
37			
39			
41			
43			
45			
47			
49			

Les données varient d'une mesure à l'autre et on obtient une distribution des mesures

Encore plus visible avec 10 000 mesures !



x

L'expérimentateur doit caractériser cette distribution :

Mesurer c'est donc *estimer*
la moyenne et l'écart-type de la distribution

$$\mu = E(x) = \int_{x_0}^{x_1} x f(x) dx$$

$$\sigma_X = \sqrt{E[(X - E[X])^2]}$$

Estimation de la moyenne et de l'écart type à partir d'un **échantillon de mesures**

$$\mu = E(x) = \int_{x_0}^{x_1} x f(x) \, dx \qquad \sigma_X := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x) \, dx}$$

Moyenne

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Ecart type

$$\sigma_X := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n = \sum_{i=1}^n x_i \times f_i.$$

Application

Moyenne

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Ecart type

$$\sigma_X := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

On se limite à un échantillon des 4 premières mesures

Num. mesure	Période du pendule	Num. mesure	Période du pendule
1	1.91416	2	1.78052
3	1.79275	4	1.85855

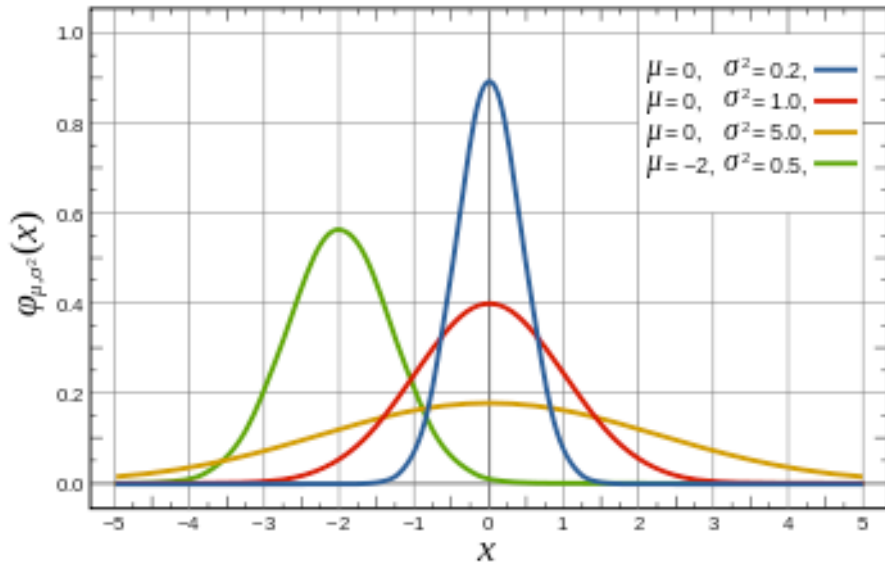
1.836495 → 1.86

0.062 → 0.06.

Quelques rappels

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{for } x \in [a, b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

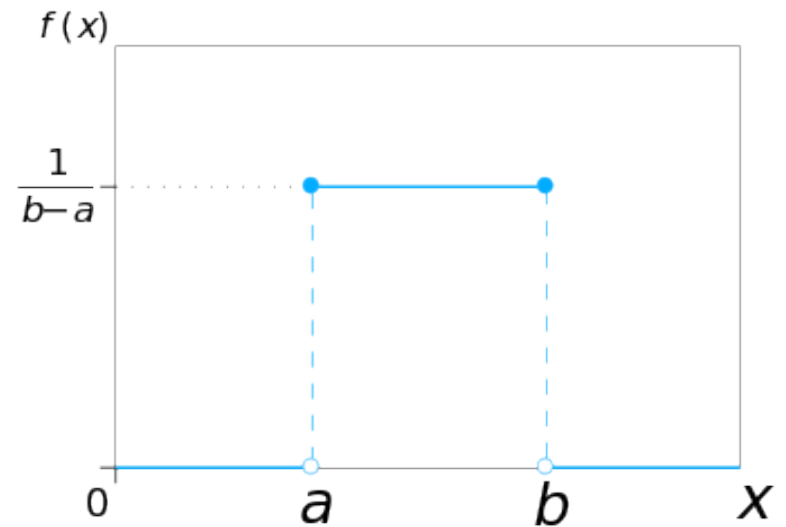


Moyenne

μ

Variance

σ^2



Moyenne

$\frac{a+b}{2}$

Variance

$\frac{1}{12}(b-a)^2$