

Etude des sections efficaces de production de l'antihydrogène \bar{H} et de l'ion antihydrogène \bar{H}^+ dans l'expérience GBAR

Mateo Valdes

Caen, Master 2 Recherche Noyaux, Atomes et Collisions

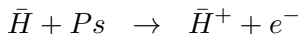
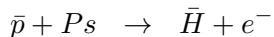
Stage encadré par : R. Lazauskas, M. Dufour, P.A. Hervieux

Gravitational Behaviour of Antihydrogen at Rest (GBAR)

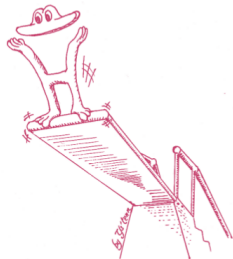
- GBAR : projet expérimental soutenu par le [CERN](#) (2012).
- Collaboration internationale regroupant 49 physiciens issus de 14 instituts.
- But : mesurer la chute libre d'atomes ultrafroids d'antihydrogène \bar{H} pour étudier le comportement de l'antimatière dans un champ de gravitation.
- Responsable théorie GBAR : P.A. Hervieux.
- Collaboration avec R. Lazauskas et M. Dufour (expertise en théorie quantique des collisions).

Réactions de production de l'antihydrogène \bar{H} et de l'ion antihydrogène \bar{H}^+ dans l'expérience GBAR

- Production contrôlée par



- Recherche d'optimisation du taux de production.
- Sections efficaces expérimentales insuffisamment connues aux énergies de GBAR.
- **Calculs théoriques nécessaires.**

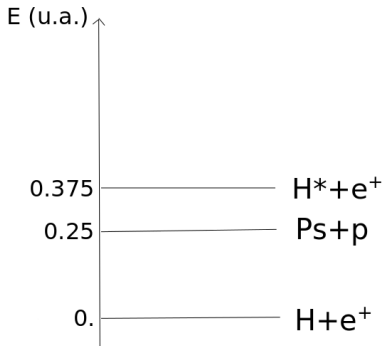


Première réaction : $\bar{p} + Ps \rightarrow \bar{H} + e^-$

- Apprentissage du Fortran 90.
- Théorie quantique des collisions (déphasages).
- Méthodes de résolution numérique d'équations intégró-différentielles (Numérov, réseaux de Lagrange).
- Diffusion élastique $H + e^+$ - Calcul à une voie.
- Approche des canaux couplés
 - Traitement analytique et numérique de potentiels non-locaux.
 - Calcul à deux voies de la diffusion élastique $H + e^+$
 - Mise en place du formalisme pour $\bar{p} + Ps \rightarrow \bar{H} + e^-$

3 premières voies du système (e^+ , e^- , p)

Une infinité de voies peut être considérée, ici, représentation seulement des trois premières.



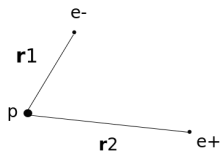
1 u.a. d'énergie = 27.2 eV

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{e^-}$$

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m_e \mathbf{p}_p - m_p \mathbf{p}_{e^-}}{m_p + m_e}$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_e \mathbf{r}_{e^-} + m_p \mathbf{r}_p}{m_e + m_p} - \mathbf{r}_{e^+}$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{m_e (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{e^-}) - (m_p + m_e) \mathbf{p}_{e^+}}{2m_e + m_p}$$



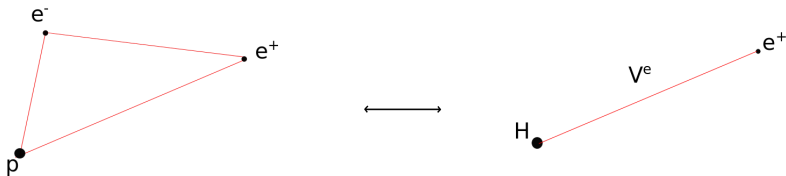
Hamiltonien du système à trois corps (e^+ , e^- , p)

$$\hat{H}_{lab} = \frac{\mathbf{p}_p^2}{2m_p} + \frac{\mathbf{p}_{e^+}^2}{2m_e} + \frac{\mathbf{p}_{e^-}^2}{2m_e} - \frac{\alpha\hbar c}{|\mathbf{r}_{e^+} - \mathbf{r}_{e^-}|} + \frac{\alpha\hbar c}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{e^+}|} - \frac{\alpha\hbar c}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{e^-}|},$$

- Séparation du centre de masse - coordonnées de Jacobi.
- Simplification

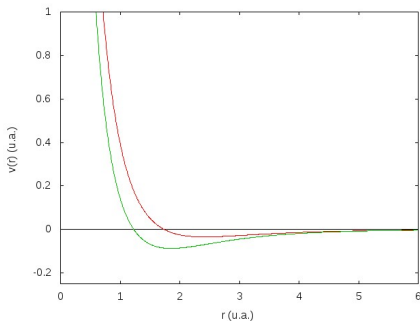
$$\hat{H}_{lab} = \hat{H}_{CM} + \hat{H}_H + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2} + V^e(r_2)$$

- Potentiel effectif V^e extrait de la littérature : interaction $H - e^+$



Potentails $V^e(r)$ développés en physique atomique

Potentails de Mott-Massey (rouge) et de Dalgarno-Lynn (vert)



Première approche : fonction d'onde approchée

$$|\Phi\rangle = |\Phi_{CM}\rangle |\Phi_{GS}^H\rangle |\Phi^{H+e^+}\rangle$$

Principe de la méthode des déphasages

- Développement de l'état stationnaire de diffusion sur la base des ondes partielles de l'Hamiltonien.
- Résolution d'une infinité d'équations radiales

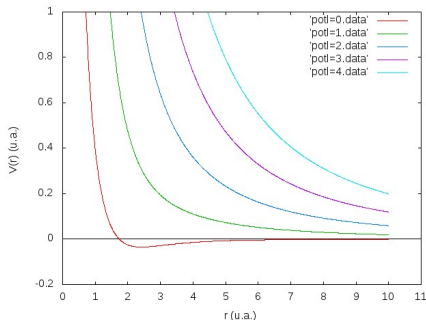
$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} + V^e(r) - E \right] u_{k\ell}(r) = 0,$$

- Asymptotiquement $u_{k\ell}^{as}(r) = \hat{j}_\ell(kr) + \tan(\delta_\ell) \hat{\eta}_\ell(kr)$
- Sections efficaces

$$\sigma(E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_\ell(k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(\delta_\ell)$$

- A basse énergie et pour V^e utilisés, nombre fini de termes.

Validité de la méthode des déphasages



À basse énergie,

- Le potentiel V^e décroît plus vite que $1/r^2$
- À l'infini, barrière centrifuge très peu différente de la barrière centrifuge d'une particule libre
- Déphasage tend alors vers zéro
- Utilisation d'un nombre de termes finis pour le calcul de la section efficace totale
- À partir de $\ell = 3$, sections efficaces partielles négligeables

- Méthode de Numérov basée sur un schéma numérique de discrétisation aux différences finies.

$$u_{k\ell}(r_{i+1}) = \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r_i^2} + 2V^e(r_i) - k^2 + 2 \right) u_{k\ell}(r_i) - u_{k\ell}(r_{i-1}).$$

- Simple mais coût numérique relativement élevé par rapport à la méthode des réseaux de Lagrange
- Sert de référence pour tester les méthodes plus complexes

Méthode des réseaux de Lagrange

- Pour définir un réseau de Lagrange il faut introduire trois quantités
 - N points de discrétisation x_i
 - N poids λ_i associés à chacun des points x_i
 - N fonctions de Lagrange $f_i(x)$
- Quantités contraintes par les conditions
 - λ_i et x_i définissent une formule de quadrature de Gauss

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^N \lambda_i g(x_i)$$

- $f_i(x_j) = \lambda_i^{-1/2} \delta_{ij}$ la fonction de Lagrange s'annule donc sur tous les points différents de x_i

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = \sum_{k=1}^N \lambda_k f_i(x_k) f_j(x_k) dx = \delta_{ij}$$

- Calcul facile des éléments de matrice du potentiel

$$V_{ij} = \int_a^b f_i(x)V(x)f_j(x)dx = V(x_i)\delta_{ij}$$

- Développement de la fonction radiale sur la base des fonctions de Lagrange-Laguerre généralisées
- Plus adaptée pour les problèmes complexes, actuellement utilisée dans le domaine de la physique à peu de corps.
- Coût numérique moindre en comparaison avec la méthode de Numérov.

- Test de la méthode par détermination des niveaux d'énergie des états liés de l'atome d'hydrogène

$$u_{kl}(r) = \sum_i^N c_i f_i(r)$$

- Résultats très proches des valeurs analytiques

$E_{n,\text{réf}}$ (u.a.)	$\Delta_{N=10}$	$\Delta_{N=15}$
-0.500	2.4×10^{-7}	2.9×10^{-11}
-0.125	7.2×10^{-16}	1.2×10^{-15}
-0.555	1.8×10^{-10}	1.4×10^{-16}
-0.3125	4.0×10^{-5}	7.6×10^{-9}
-0.020	3.0×10^{-3}	3.7×10^{-5}

Méthode des réseaux de Lagrange - Calcul de la diffusion élastique $H + e^+$

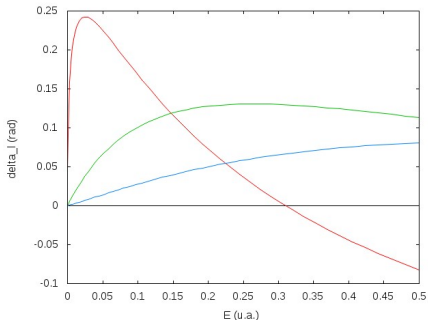
- Développement de la fonction radiale sur la base des fonctions de Lagrange-Laguerre généralisées avec un raccordement asymptotique d'états de collisions

$$u_{k\ell}(r) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(r) + \hat{j}_\ell(kr) + \tan(\delta_\ell) \hat{\eta}_\ell(kr) f^{cut}(r)$$

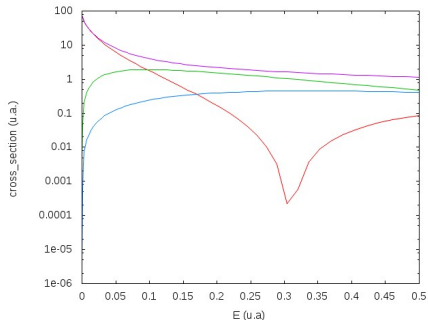
- Résolution de l'équation différentielle radiale sous forme d'un système linéaire pour identifier les coefficients.
- Détermination de la valeur de la tangente avec l'expression intégrale des déphasages

Calcul à une voie de la diffusion élastique $H + e^+$ avec le potentiel de Dalgarno-Lynn et la méthode des réseaux de Lagrange

- Déphasages en fonction de l'énergie



- Sections efficaces en fonction de l'énergie



Approche des canaux couplés - calcul à deux voies

- Généralisation du calcul à une voie.
- Permet de prendre en compte plusieurs voies simultanément et d'envisager les phénomènes de transfert.
- Ondes partielles développées sur des fonctions de voie.

$$\begin{aligned}\Psi_{LM} &= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^H(x_{\alpha}) \frac{F_{\alpha}}{y_{\alpha}}(y_{\alpha}) \{Y_{\ell_x^{\alpha}}(\hat{x}_{\alpha}) \otimes Y_{\ell_y^{\alpha}}(\hat{y}_{\alpha})\}_{LM} \\ &+ \sum_{\beta} \psi_{\beta}^{ps}(x_{\beta}) \frac{G_{\beta}}{y_{\beta}}(y_{\beta}) \{Y_{\ell_x^{\beta}}(\hat{x}_{\beta}) \otimes Y_{\ell_y^{\beta}}(\hat{y}_{\beta})\}_{LM}\end{aligned}$$

- Voies $\alpha \rightarrow (H + e^+)$
- Voies $\beta \rightarrow (Ps + p)$
- Calculs à deux voies, H et Ps dans leur état fondamental

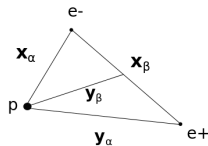
nouveaux système de coordonnées de Jacobi

$$\mathbf{x}_\alpha = \sqrt{\frac{2m_e m_p}{(m_e + m_p)}} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{e^-})$$

$$\mathbf{y}_\alpha = \sqrt{\frac{2m_e(m_e + m_p)}{(2m_e + m_p)}} \left(\frac{m_e \mathbf{r}_{e^-} + m_p \mathbf{r}_p}{m_e + m_p} - \mathbf{r}_{e^+} \right)$$

$$\mathbf{x}_\beta = \sqrt{\frac{2m_e^2}{(m_e + m_e)}} (\mathbf{r}_{e^+} - \mathbf{r}_{e^-})$$

$$\mathbf{y}_\beta = \sqrt{\frac{2m_p(m_e + m_e)}{(2m_e + m_p)}} \left(\mathbf{r}_p - \frac{\mathbf{r}_{e^-} + \mathbf{r}_{e^+}}{2} \right)$$



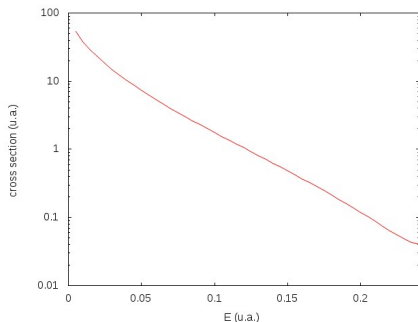
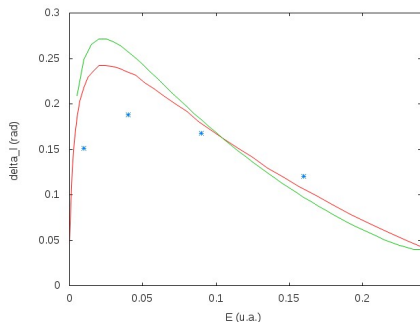
- Développement des fonctions radiales sur la base des fonctions de Lagrange-Laguerre généralisées avec un raccordement asymptotique d'états de collision
- Couple d'équations intégró-différentielles à résoudre sous forme d'un système linéaire.
- Calcul analytique et numérique des potentiels non-locaux difficile .

Éxpression d'un potentiel non-local

Calcul plus complexe à cause de la présence de potentiels non-locaux.

$$\int dy_\alpha \hat{O}_{\alpha\beta i}(y_\beta) G(y_\beta) = \int d^3 \mathbf{x}_\alpha d^3 \mathbf{y}_\alpha \psi_{\alpha'}^{H*} \left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{2}} \right) f_i(y_\alpha) \\ \{Y_{\ell_x^{\alpha'}}(\hat{x}_\alpha) \otimes Y_{\ell_y^{\alpha'}}(\hat{y}_\alpha)\}_{LM}^* \{Y_{\ell_x^\beta}(\hat{x}_\beta) \otimes Y_{\ell_y^\beta}(\hat{y}_\beta)\}_{LM} \\ \frac{1}{y_\alpha y_\beta} \left[-\frac{d^2}{dy_\beta^2} + \frac{\ell_{y_\beta}(\ell_{y_\beta} + 1)}{y_\beta^2} - k_\beta^2 + \frac{1}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{e+}|} - \frac{\sqrt{2}}{x_\alpha} \right] \psi_\beta^{ps}(x_\beta) G(y_\beta)$$

Calcul à deux voies de la diffusion élastique $H + e^+$ avec le potentiel de Dalgarno-Lynn et la méthode des réseaux de Lagrange



Comparaison avec des résultats obtenus avec des méthodes ab-initio (par A. Kvitsinsky *et al.*)

- Finaliser le calcul des sections efficaces de la réaction $Ps + \bar{p} \rightarrow \bar{H} + e^-$.
- Introduire une troisième voie
- Étude de possibles résonances.
- Développer des méthodes de type ab-initio (Faddeev) pour établir des résultats de référence.