Introduction à la relativité générale

Richard Taillet
Juillet 2015

Université Savoie Mont Blanc
LAPTh (Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique)

Plan

Principes et formalisme

Tests expérimentaux

Difficultés

Principes

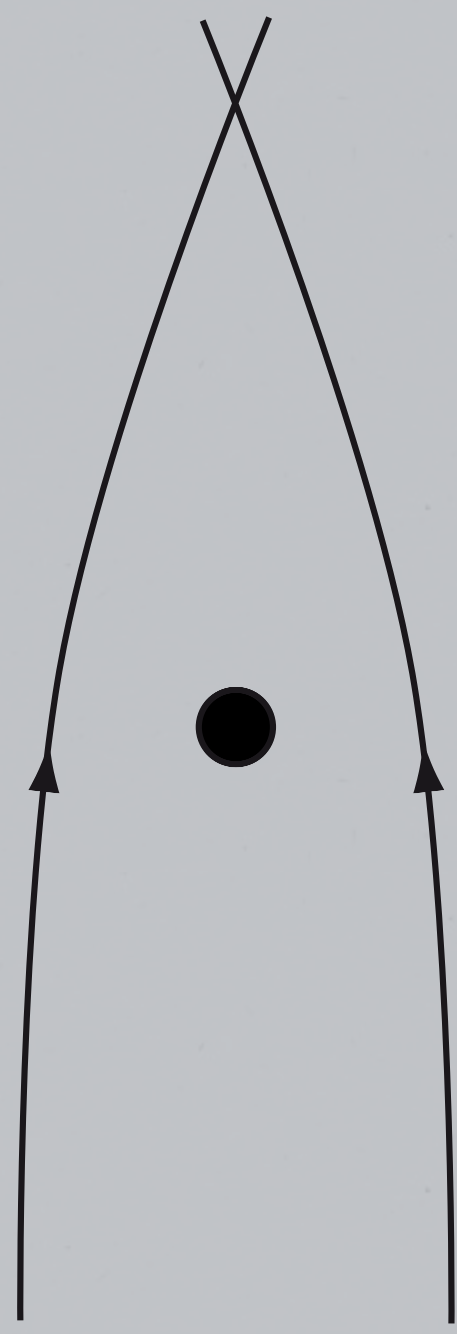
Nécessité d'une théorie relativiste de la gravitation

L'interaction gravitationnelle ne peut pas être instantanée

Elle doit prendre en compte la relativité restreinte

Programme mené à bien par Albert Einstein en 1915

Principes



Universalité de la chute libre :

« Les objets lancés ou lâchés de la même façon

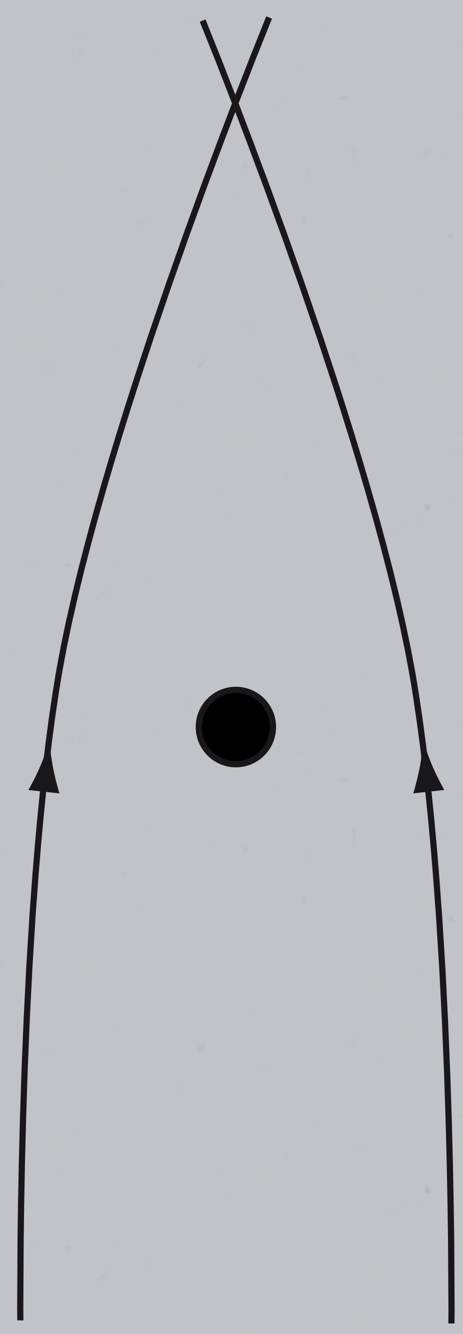
tombent de la même façon

indépendamment de leur masse »

$$m_i\,\vec{a} = m_g\,\vec{g}$$

égalité de la masse grave et de la masse inertielle

Principes



Universalité de la chute libre :

« Les objets lancés ou lâchés de la même façon

tombent de la même façon

indépendamment de leur masse »

$$\vec{a} = \quad \vec{g}$$

égalité de la masse grave et de la masse inertielle

Principes

Référentiel en chute libre

$$m\,\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_i$$

$$m\,\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a}_e = \vec{0}$$

Principe d'équivalence :

« Les lois de la physique,

pour un observateur en chute libre dans un champ gravitationnel,

sont localement identiques à celles en l'absence de gravitation »

Principes

Dans un référentiel inertiel $$m\,\vec{a} = \vec{0}$$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$m\,\vec{a} = -m\,\vec{a}_e$$

Principes

Dans un référentiel inertiel $$m\,\vec{a} = \vec{0}$$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$m\,\vec{a} = -m\,\vec{a}_e = m\,\vec{g}$$

Remarque : oublier la notion de référentiel galiléen !

Principes

Dans un référentiel inertiel

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Dans le référentiel qui nous intéresse (le laboratoire)

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Principes

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

où $$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\sigma}\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

c’est la **connexion affine**

forces d’inertie = forces gravitationnelles !

Principes

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

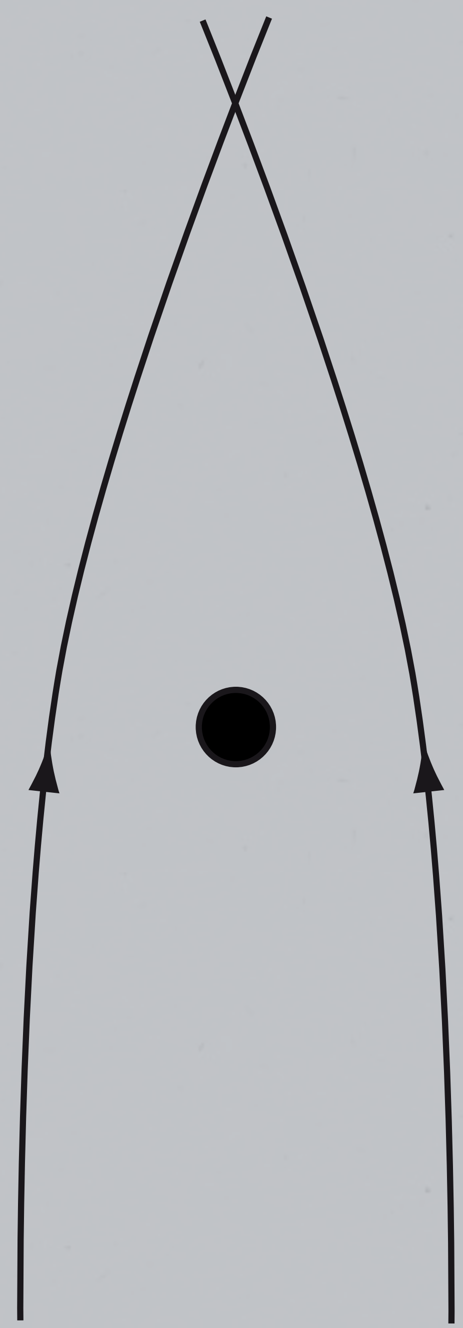
c’est l’**équation des géodésiques**

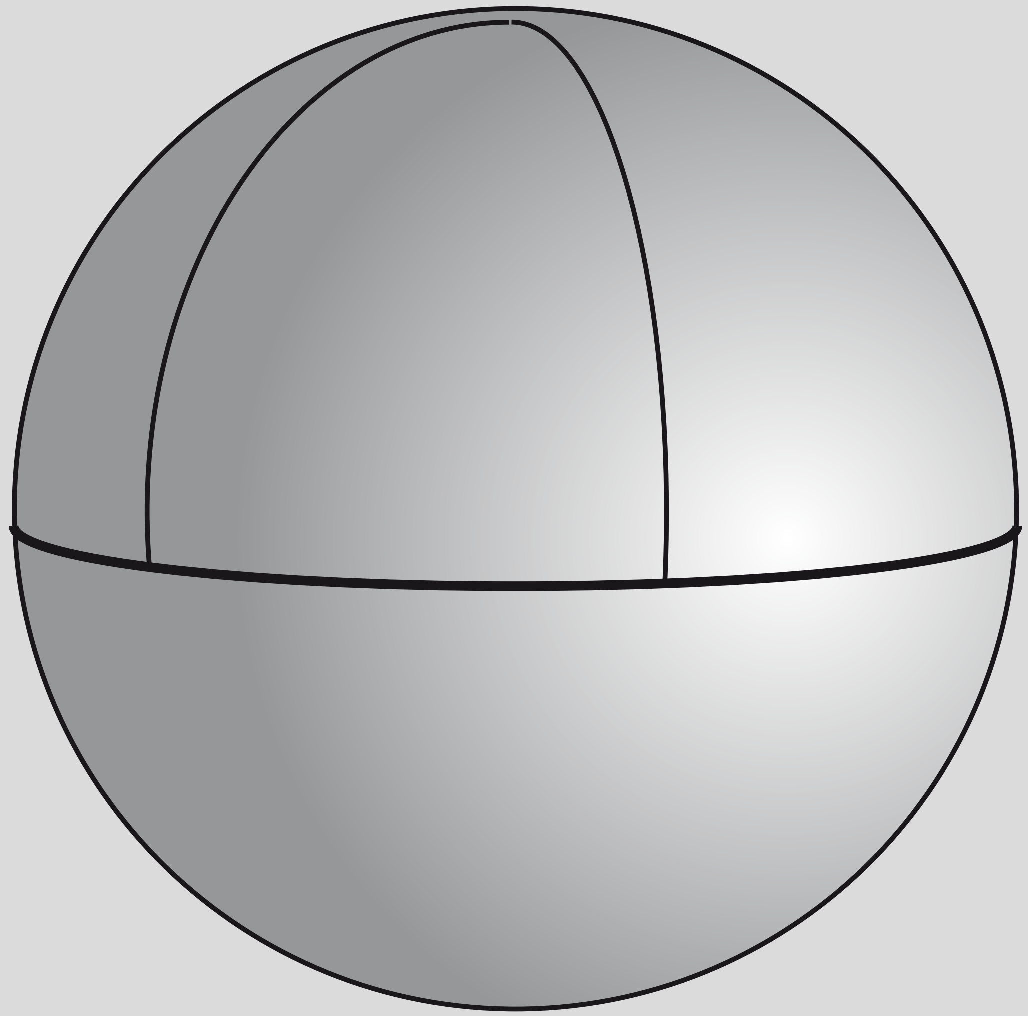
Elle donne l’équation des lignes droites dans n’importe quel système de coordonnées

Elle donne l’équation des chemins les plus courts sur des surfaces courbées

Principes

la gravitation est due à la courbure de l'espace-temps





Principes

Dans l'espace-temps usuel (plat) de la RR

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

cette relation définit la géométrie de l'espace-temps

Principes

Dans l'espace-temps usuel (plat) de la RR

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

réécriture

pédante

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, d\xi^\mu\, d\xi^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tenseur métrique

$g_{\mu\nu}$ *Principes*

Dans un espace-temps courbe

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

détermine la relation entre

coordonnées et « distances »

(géométrie)

$$g_{\mu\nu}$$

Principes

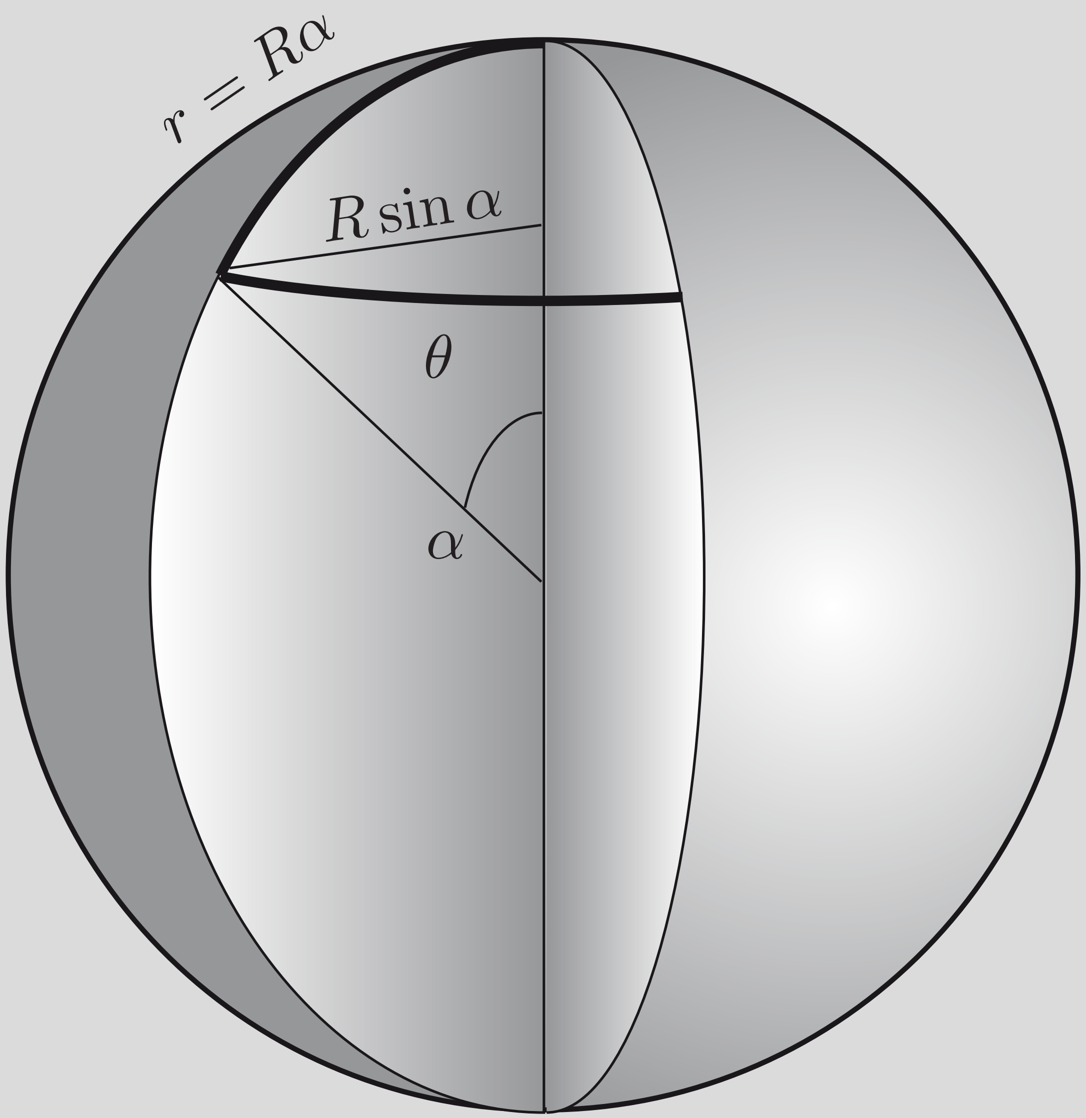
Dans un espace-temps courbe

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

détermine la relation entre

coordonnées et « distances »

(géométrie)



$$d\ell^2 = R^2\, d\alpha^2 + R^2 \sin^2\alpha\, d\theta^2$$

$g_{\mu\nu}$ *Principes*

Dans un espace-temps courbe

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

c'est aussi un potentiel gravitationnel

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right)$$

$g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu}$$

est la quantité fondamentale en relativité générale

Principes

Remarque #1 sur le potentiel gravitationnel

La présence d'un champ gravitationnel
affecte les distances et les durées

$$ds^2 = g_{00}\,dt^2 + 2\,g_{10}\,dt\,dx + 2\,g_{20}\,dt\,dy + 2\,g_{30}\,dt\,dz$$
$$+ g_{11}\,dx^2 + 2\,g_{12}\,dx\,dy + 2\,g_{13}\,dx\,dz + 2\,g_{23}\,dy\,dz + g_{33}\,dz^2$$

Principes

Remarque #2 sur le potentiel gravitationnel

$$\frac{GM}{r}$$ a la dimension physique de v^2

$$\frac{GM}{c^2}$$ a la dimension physique d'une longueur

Principes

Métrique de Schwarzschild

- dans le vide
- pas de charge électrique
- distribution de masse à symétrie sphérique
- isotropie
- conditions aux limites plates
- coordonnées sphériques
- constante cosmologique nulle

Principes

Métrique de Schwarzschild

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Principes

Rayon de Schwarzschild

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} \approx \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \times 2{,}97 \text{ km}$$

environ 3 km pour le Soleil,

environ 1 cm pour la Terre,

quelques millions de km pour un trou noir supermassif

Principes

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \dfrac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_s}{r} = \frac{2GM}{rc^2} = \frac{2\phi}{c^2}$$

$\dfrac{r_s}{r} \approx 10^{-9}$ à la surface de la Terre

$\dfrac{r_s}{r} \approx 10^{-6}$ à la surface du Soleil

Principes

remarque sur la géométrie

$$ds^2 = \cancel{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - \cancel{r^2 \sin^2\theta d\phi^2}$$

temps fixé

plan équatorial

$$d\ell^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

distance radiale entre deux points

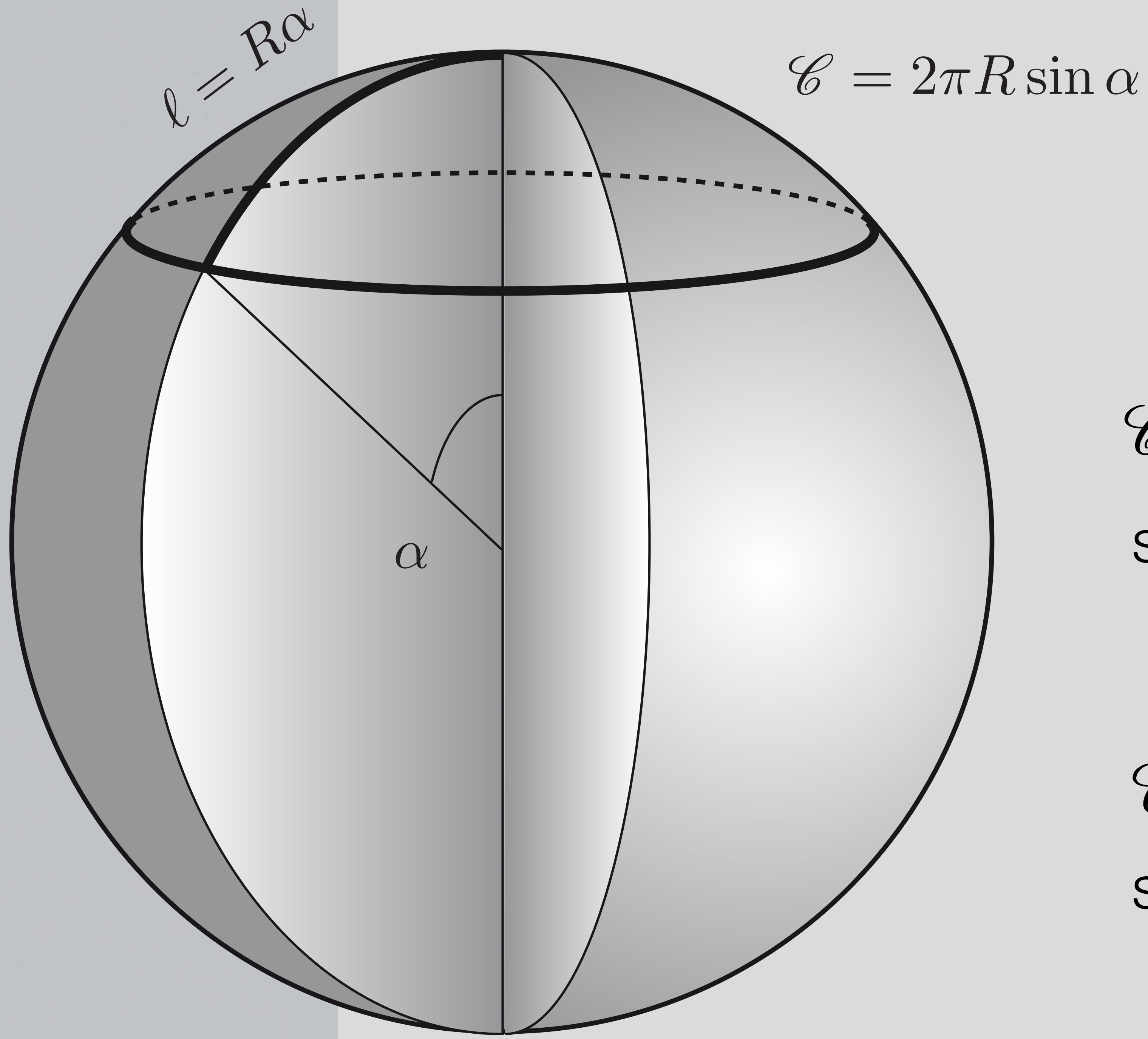
$$\Delta\ell_{AB} \approx r_B - r_A + \frac{1}{2} r_s \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$$

circonférence d'un cercle de rayon-coordonnée r

$$\mathscr{C} = 2\pi r$$

remarque sur la géométrie

Principes



$$\mathscr{C} = 2\pi R \sin\left(\frac{\ell}{R}\right)$$

sur une sphère

$$\mathscr{C} = 2\pi\ell$$

sur un plan

remarque sur la géométrie

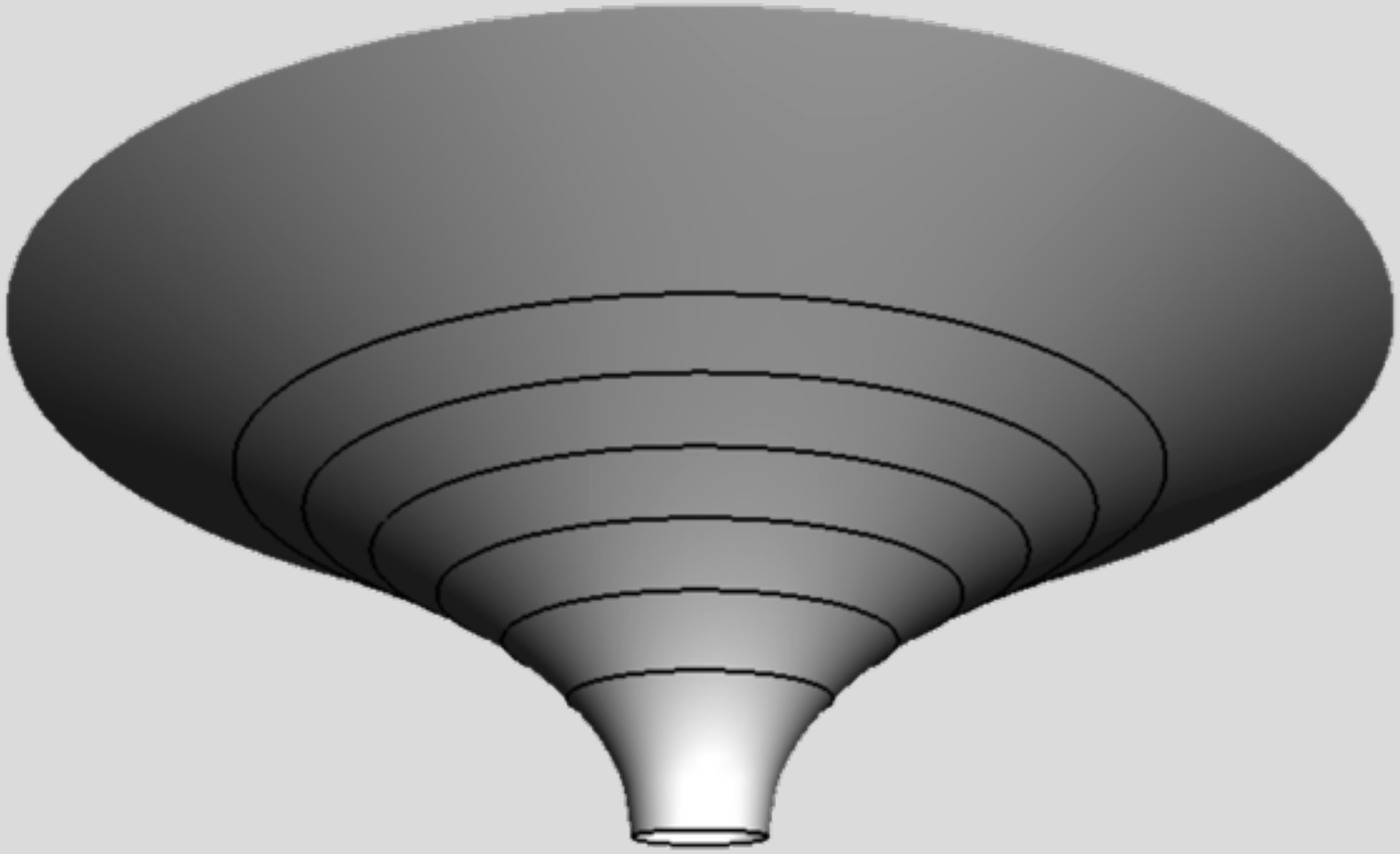
Principes

pour la métrique de Schwarzschild, dans le plan équatorial :

$$\Delta\ell_{AB} \approx r_B - r_A + \frac{1}{2} r_s \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$$
$$\mathscr{C} = 2\pi r$$

paraboloïde

de Flamm



Principes

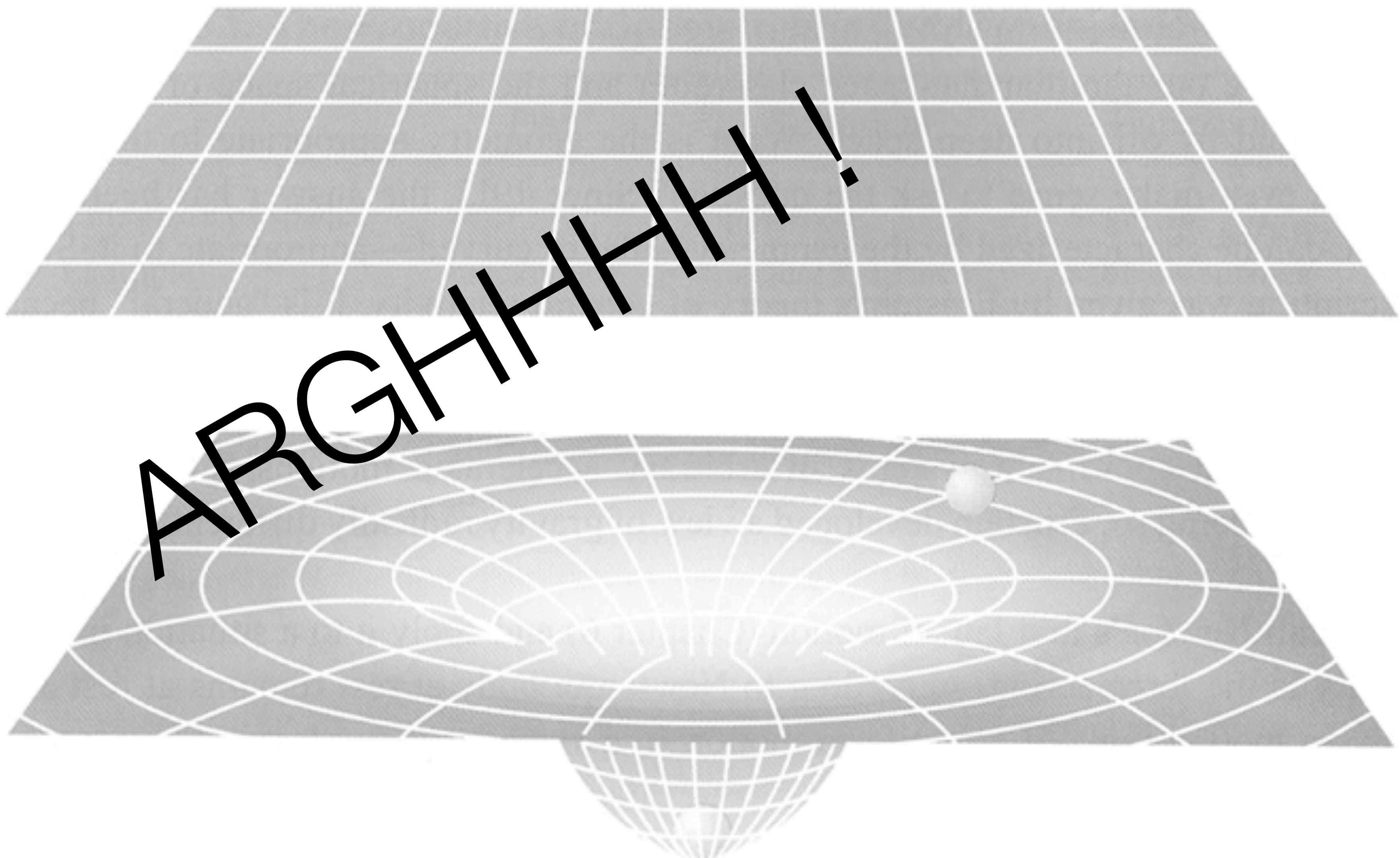


Figure 15.7. The figure suggests how flat spacetime (the uniformly spaced grid) would be distorted by the presence of a mass. Since it is the curvature of spacetime that determines how objects move, all objects, regardless of their mass, would "fall" toward the massive object at the same rate.

Principes

La courbure détermine le mouvement

Qu’est-ce qui détermine la courbure ? (la métrique ?)

Principes

Une théorie satisfaisante doit être formulée de façon covariante

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

En relativité restreinte

[quadrivecteur] = [quadrivecteur]

[tenseur] = [tenseur]

Principes

Les **tenseurs** sont des grandeurs qui se transforment d'une façon bien définie par changement de coordonnées

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} V^{\alpha}$$

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} V_{\alpha}$$

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}$$

Principes

Exemple : position, quadri-vitesse

tenseur de courbure

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}$$

tenseur de Ricci $\quad R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}$

scalaire de Ricci $\quad R = R^{\alpha}_{\alpha}$

gradient $\quad \partial_{\mu}\Phi \equiv \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}}$

Principes

Contre-exemples :

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\sigma}} \frac{\partial^2 \xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}$$

$$\partial_{\mu} V^{\alpha} \equiv V^{\alpha}{}_{,\mu} \equiv \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$$

La combinaison suivante est un tenseur

$$D_{\mu} V^{\alpha} \equiv V^{\alpha}{}_{;\mu} \equiv \partial_{\mu} V^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} V^{\beta}$$

c'est la **dérivée covariante**

Principes

On s’impose d’écrire des égalités entre tenseurs

(ça indique notamment comment les forces se transforment)

Principes

La courbure détermine le mouvement

La courbure est déterminée par le contenu de l'espace-temps

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}$$

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right)$$

Principes

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

équations d'Einstein

Ce sont 16 équations différentielles portant sur le tenseur métrique.

Elles sont hautement non linéaires

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}$$

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}\left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right)$$

Principes

Surprise : ça se résoud !

Solution de Schwarzschild

dans le vide, pas de charge électrique, symétrie sphérique, isotropie, conditions aux limites plates, coordonnées sphériques, constante cosmologique nulle

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1-\frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Principes

Remarque : faire de la physique en espace-temps courbe

Remplacer partout

$$\partial_\mu V^\alpha \equiv V^\alpha{}_{,\mu} \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu}$$

par

$$D_\mu V^\alpha \equiv V^\alpha{}_{;\mu} \equiv \partial_\mu V^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} V^\beta$$

Tests expérimentaux

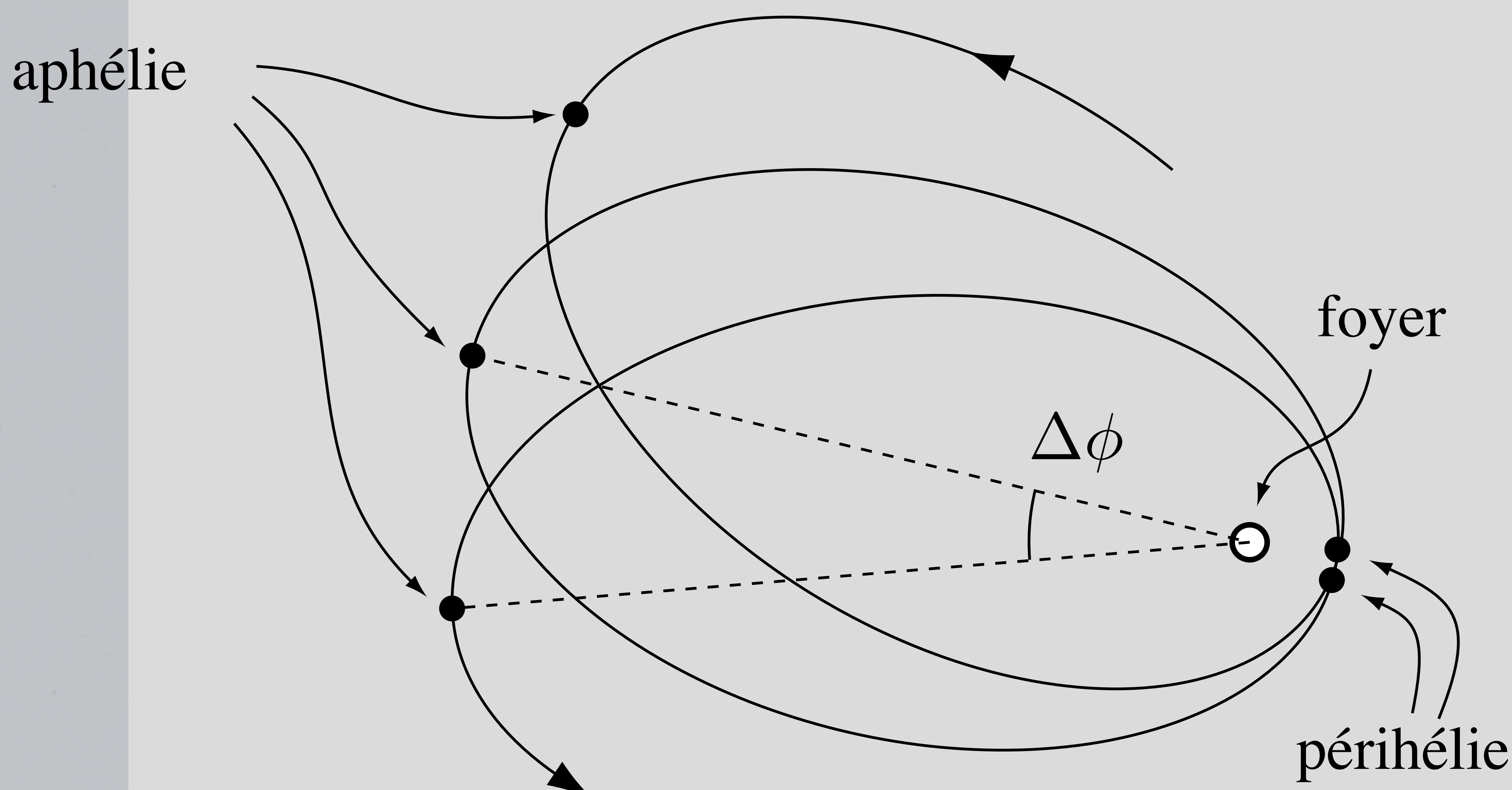
#0 Tests expérimentaux

Succès théorique :

on peut formuler une théorie relativiste de la gravitation !

#1 Tests expérimentaux

Avance du périhélie de Mercure (1915)



#1 Tests expérimentaux

Avance du périhélie de Mercure (1915)

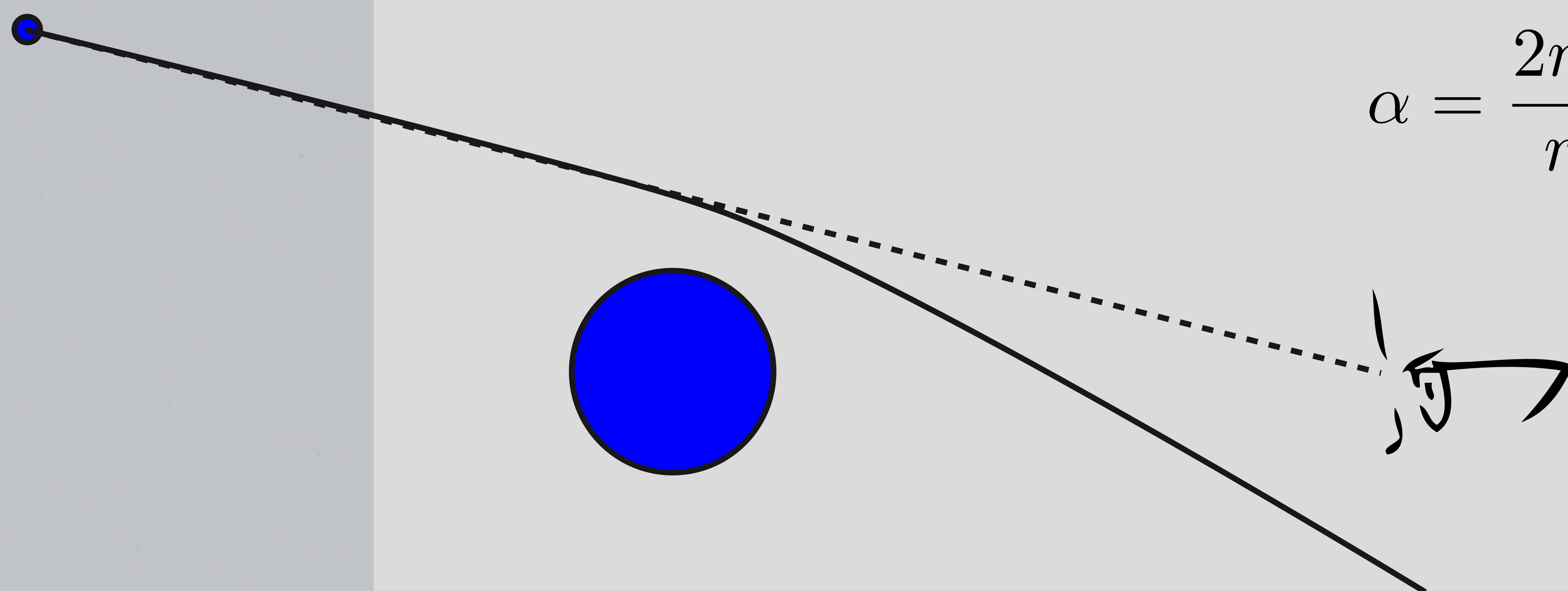
$$\Delta\phi = \frac{3\pi r_s}{a(1-e^2)}$$

43 secondes d'arc par siècle pour Mercure,

3,8 pour la Terre.

#2 *Tests expérimentaux*

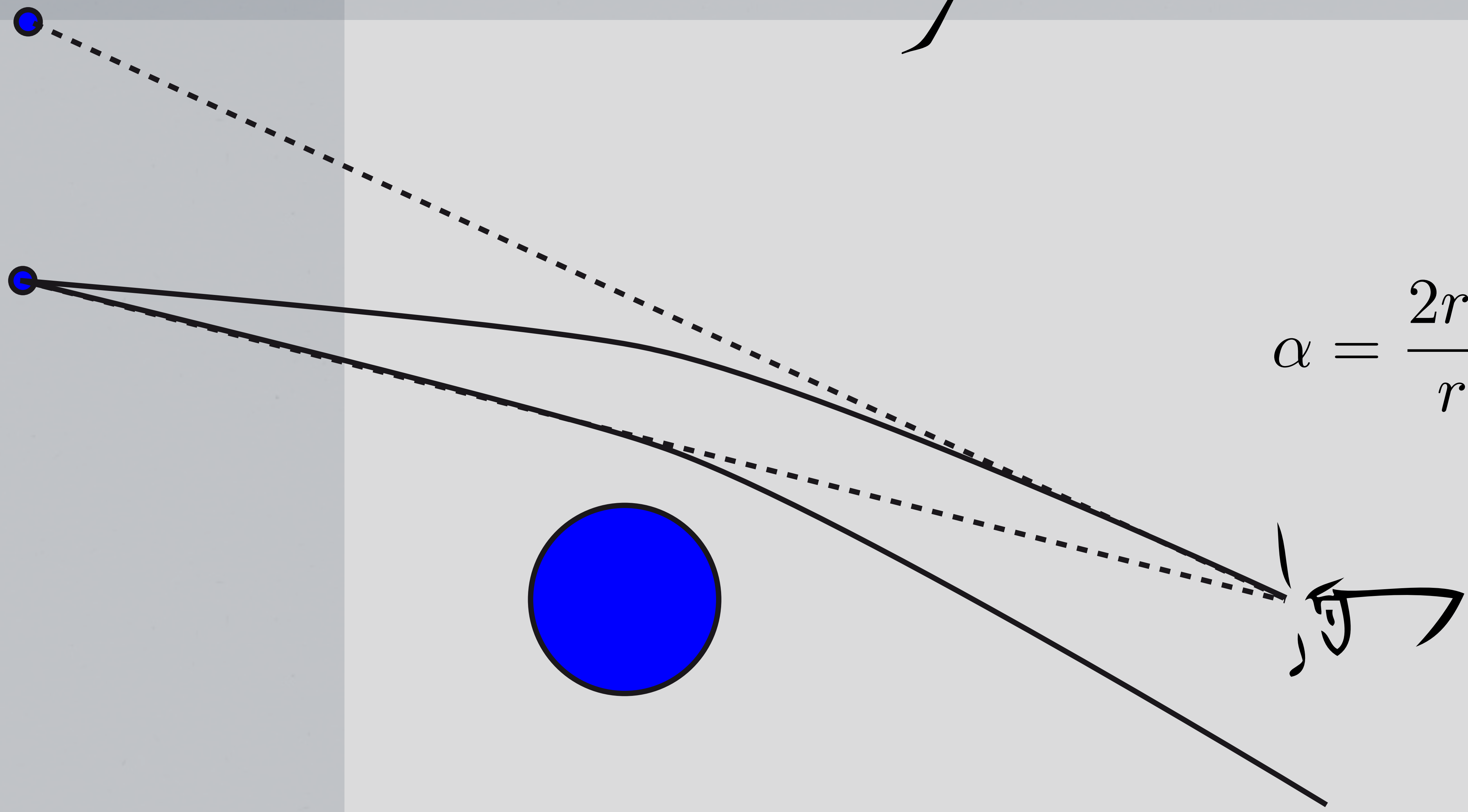
Déviation gravitationnelle des rayons lumineux (1919)



$$\alpha = \frac{2r_s}{r}$$

1,75 seconde d'arc pour le bord du Soleil

Tests expérimentaux

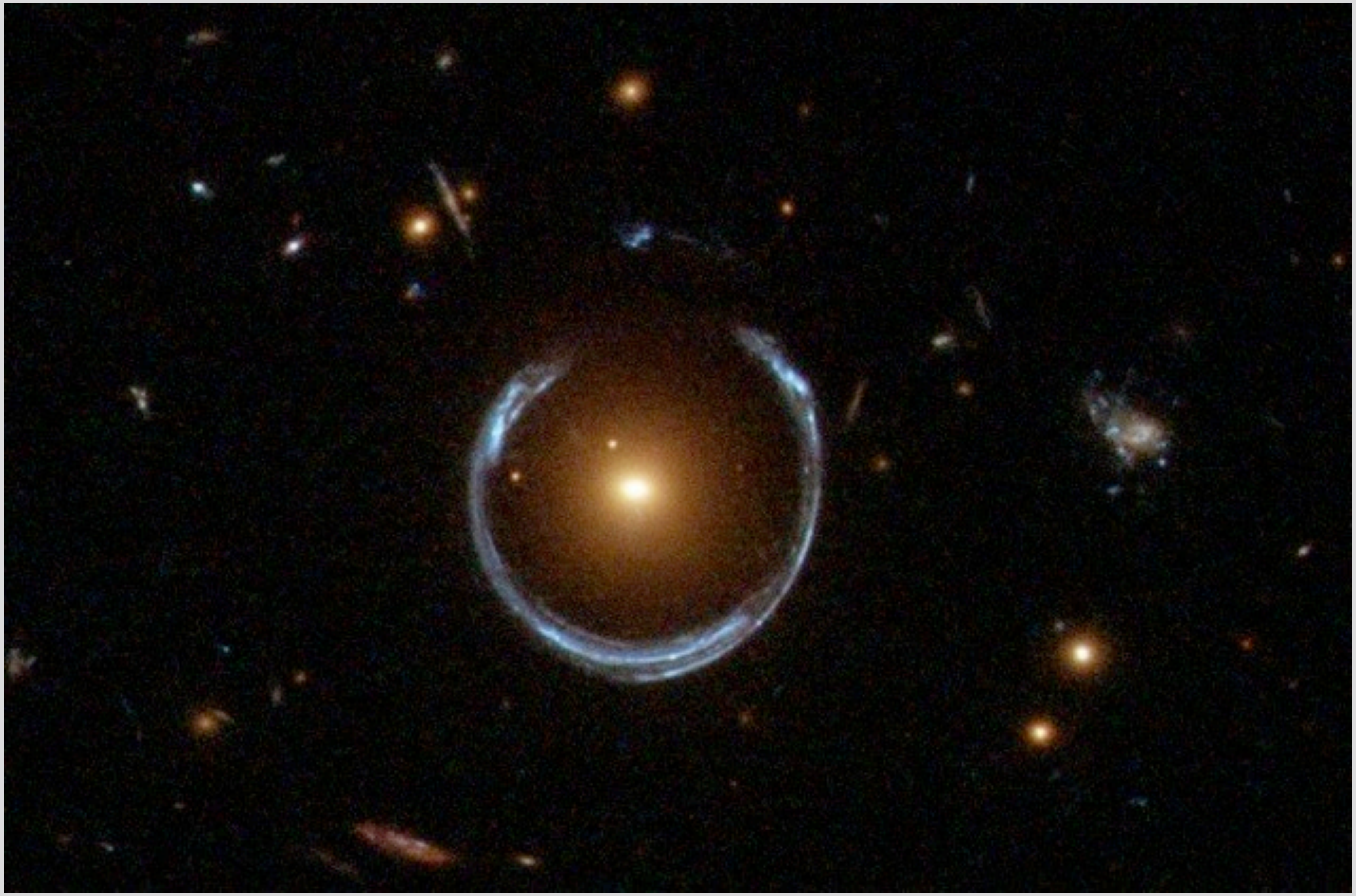


$$\alpha = \frac{2r_s}{r}$$

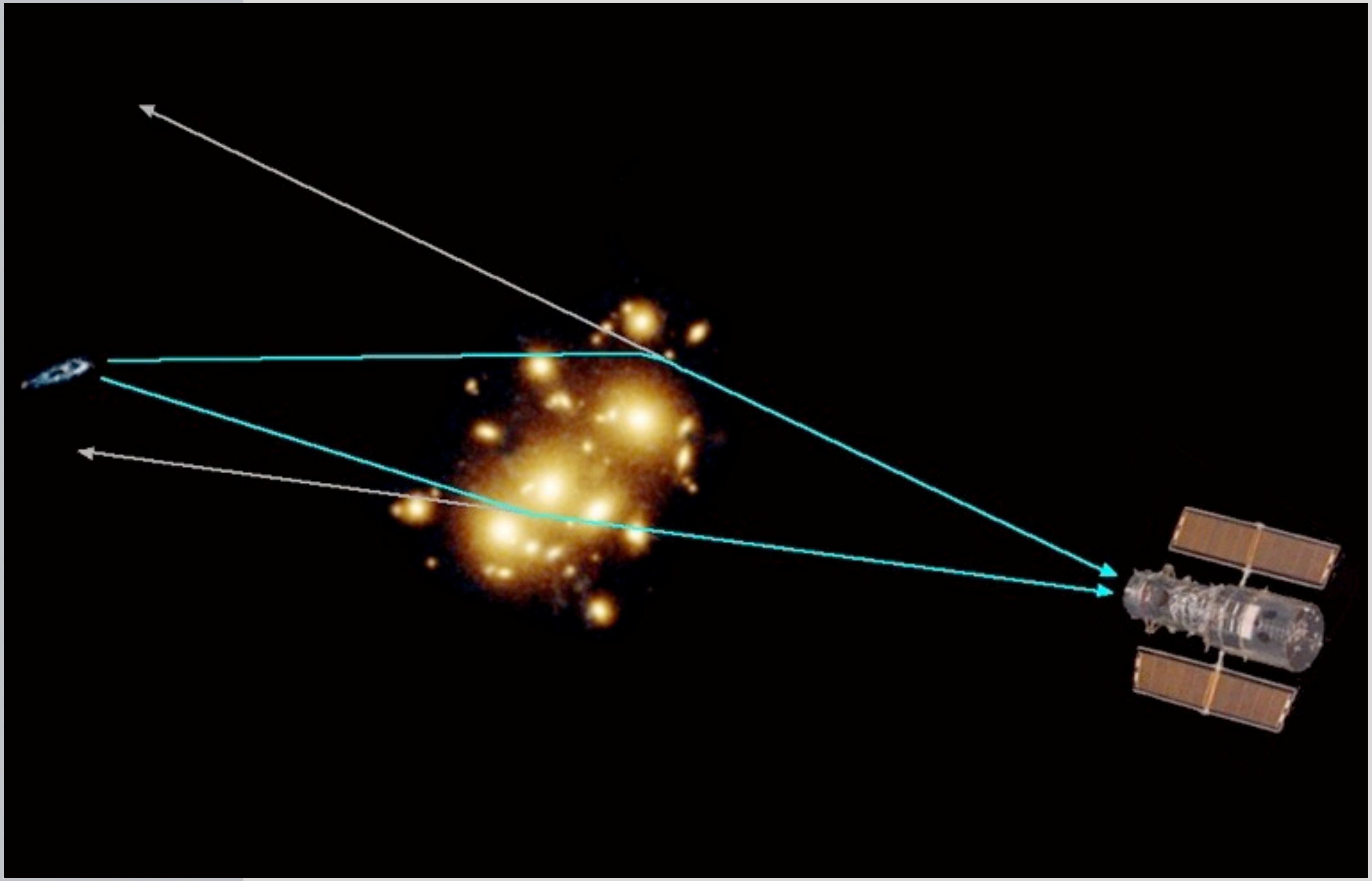
1,75 seconde d'arc pour le bord du Soleil

Tests expérimentaux

Lentilles gravitationnelles



Tests expérimentaux



#3 *Tests expérimentaux*

Expérience de Pound et Rebka (1959)

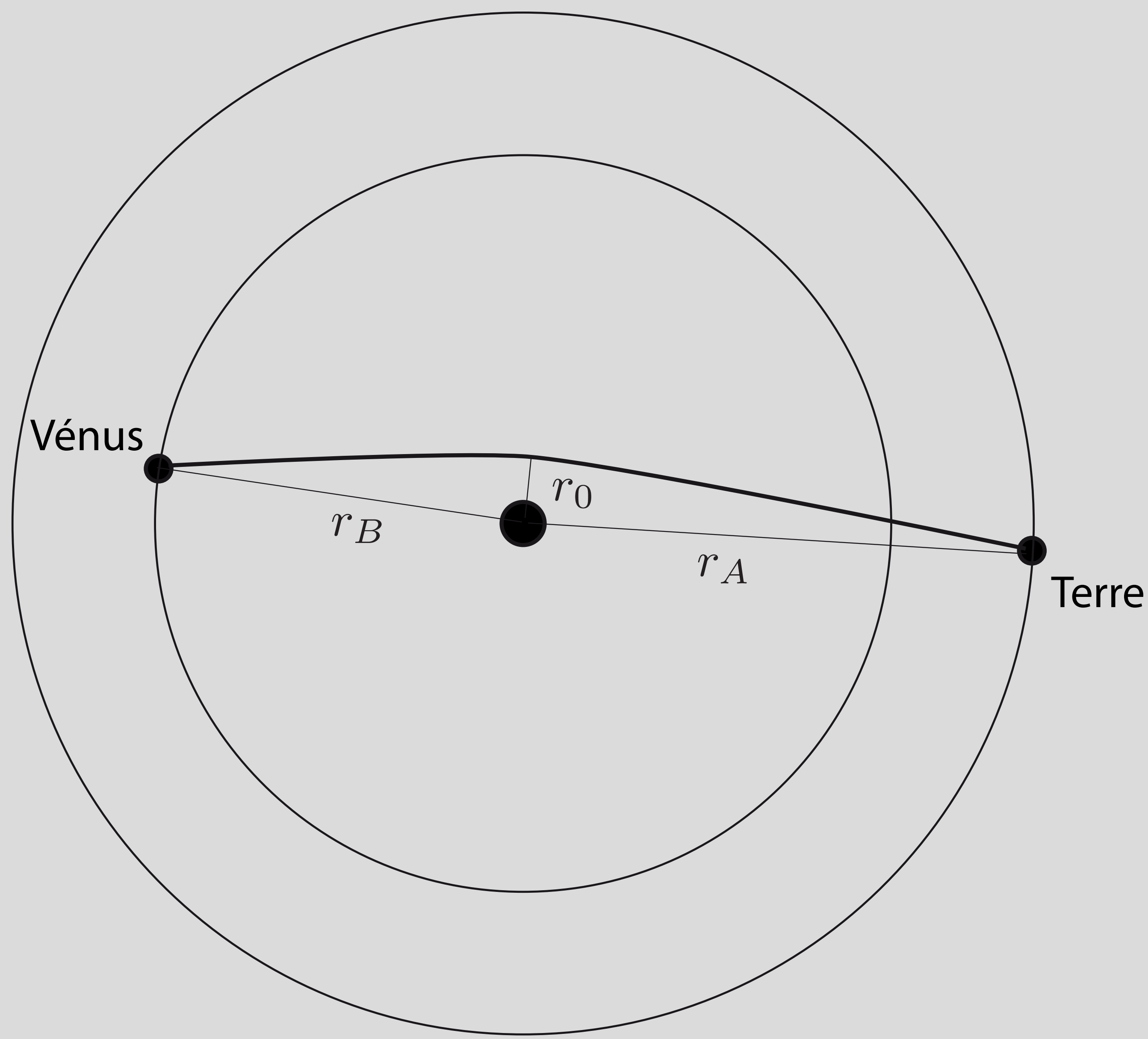
$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{1}{2}\frac{r_s}{r}\frac{\Delta r}{r} \approx 2{,}5 \times 10^{-15}$$

Expérience de Hafele & Keating (1971)

GPS (Global Positioning System)

#4 Tests expérimentaux

Retard de l'écho radar : effet Shapiro (prédit 1964 - mesuré 1968)



#4 Tests expérimentaux

#4 *Tests expérimentaux*

Retard de l'écho radar : effet Shapiro (prédit 1964 - mesuré 1968)

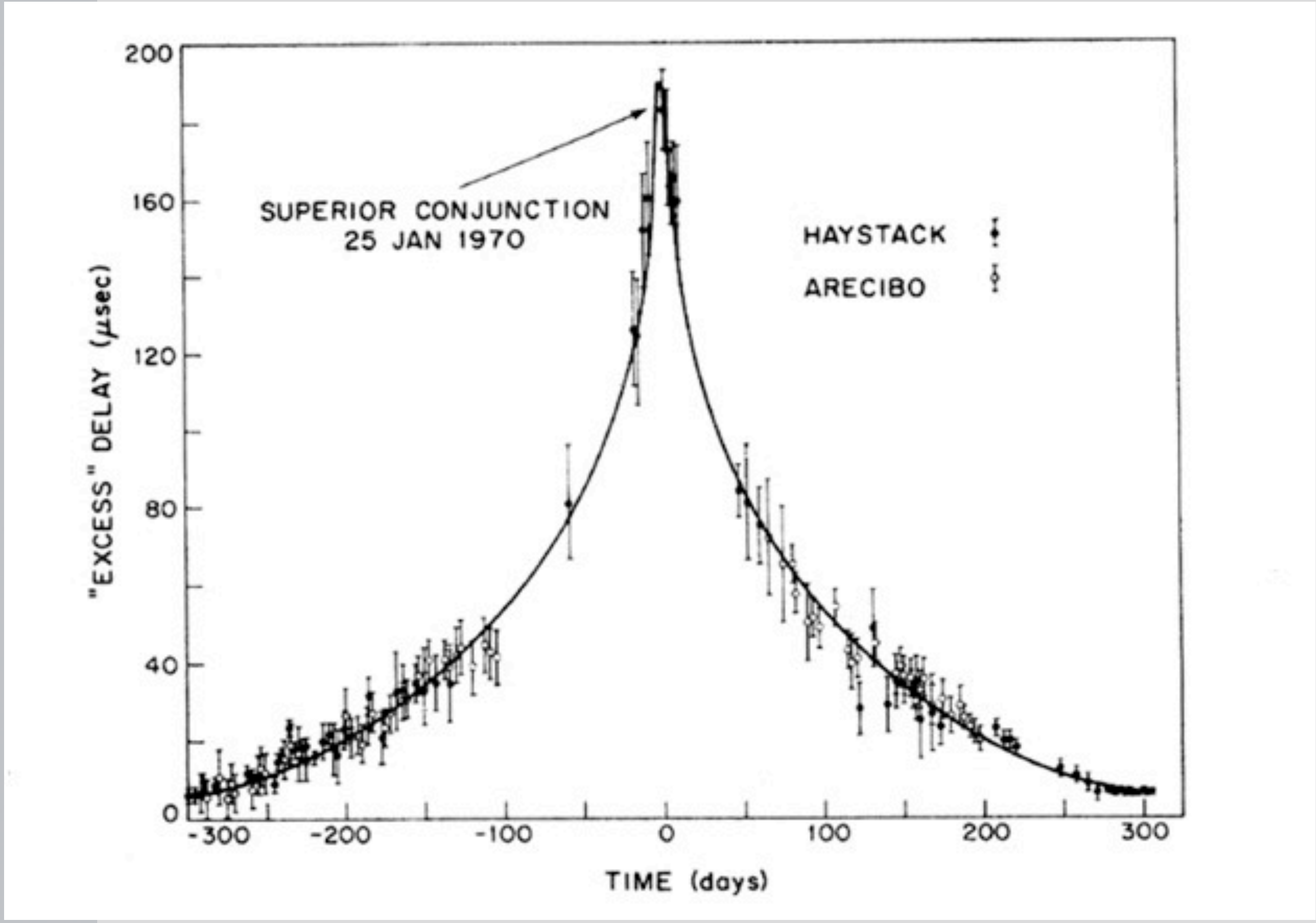
$$\Delta t = \frac{r_s}{c}\left[1 + \ln\left(\frac{4r_1r_2}{r_0^2}\right)\right]$$

$$r_s/c \approx 10\ \mu\mathrm{s}$$

Quelques centaines de microsecondes pour Vénus et Mercure.

On utilise aussi les sondes du Système solaire.

#4 Tests expérimentaux



#5 *Tests expérimentaux*

Effet Einstein-de Sitter ou précession géodétique (1916/1988)

$$\Omega \approx \frac{3c}{2r}\left(\frac{r_s}{2r}\right)^{3/2}$$

quelques arcsec/siècle

vérifié par Gravity Probe B

#6 Tests expérimentaux

Entraînement des référentiels : effet Lense-Thirring (1918/2004)

gravitomagnétisme

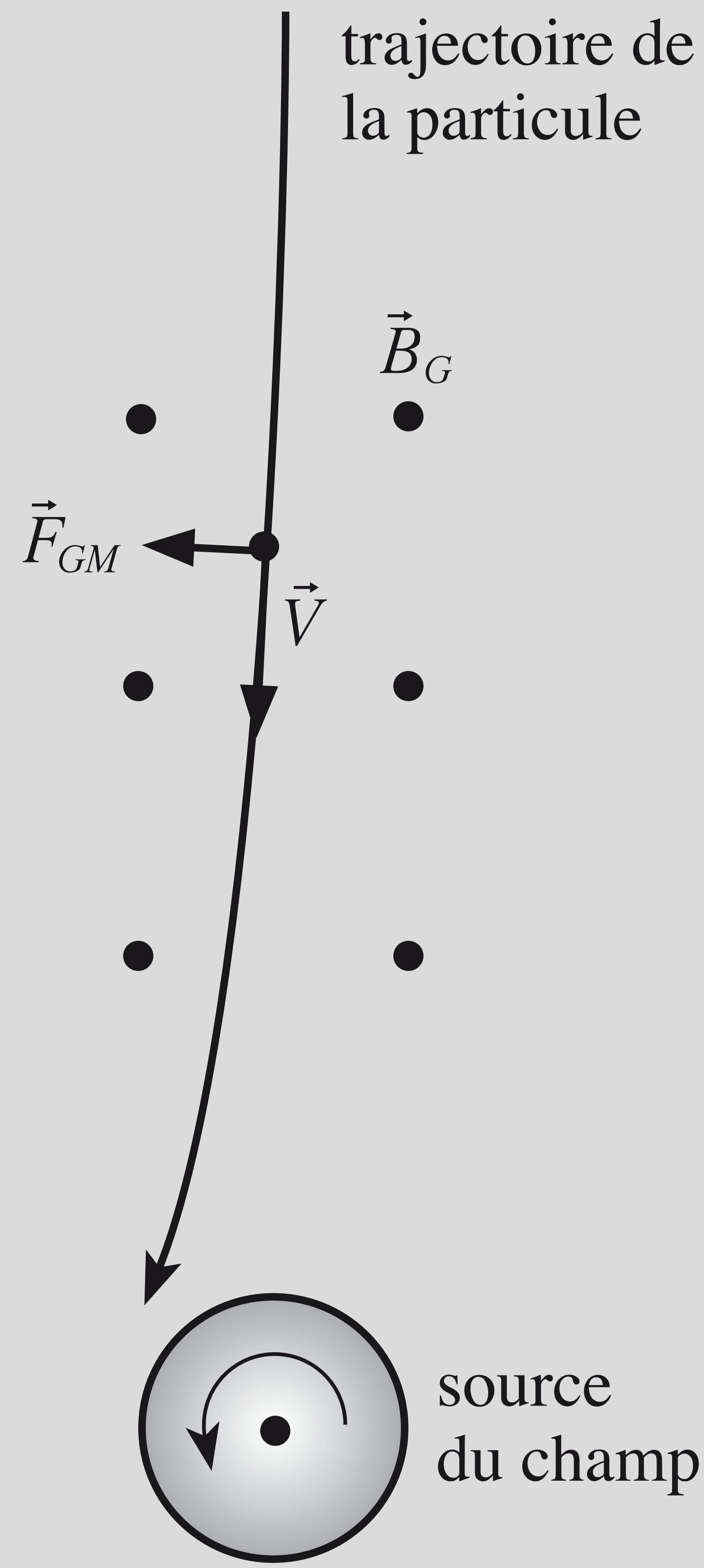
$$\vec{F} = m(\vec{E}_G + \vec{v} \wedge 4\vec{B}_G)$$

$$\vec{E}_G \equiv -\vec{\nabla}\Phi_G - \frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t}$$

$$\vec{B}_G \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_G$$

$$\Phi_G = -\iiint \frac{G\rho_0}{r}\, d^3V$$

$$A_G^i = -\iiint \frac{GJ_i}{r}\, d^3V$$


trajectoire de
la particule
$\vec{B}_G$
$\vec{F}_{GM}$
$\vec{V}$
source
du champ

#6 Tests expérimentaux

Entraînement des référentiels : effet Lense-Thirring (1918/2004)

$$\vec{\Omega} \approx \frac{r_s}{2r^3} \frac{3(\vec{J} \cdot \vec{u}_r) - \vec{J}}{M}$$

vérifié par LAGEOS

#7 *Tests expérimentaux*

Ondes gravitationnelles

dit rapidement : ondes dans la structure de l'espace-temps

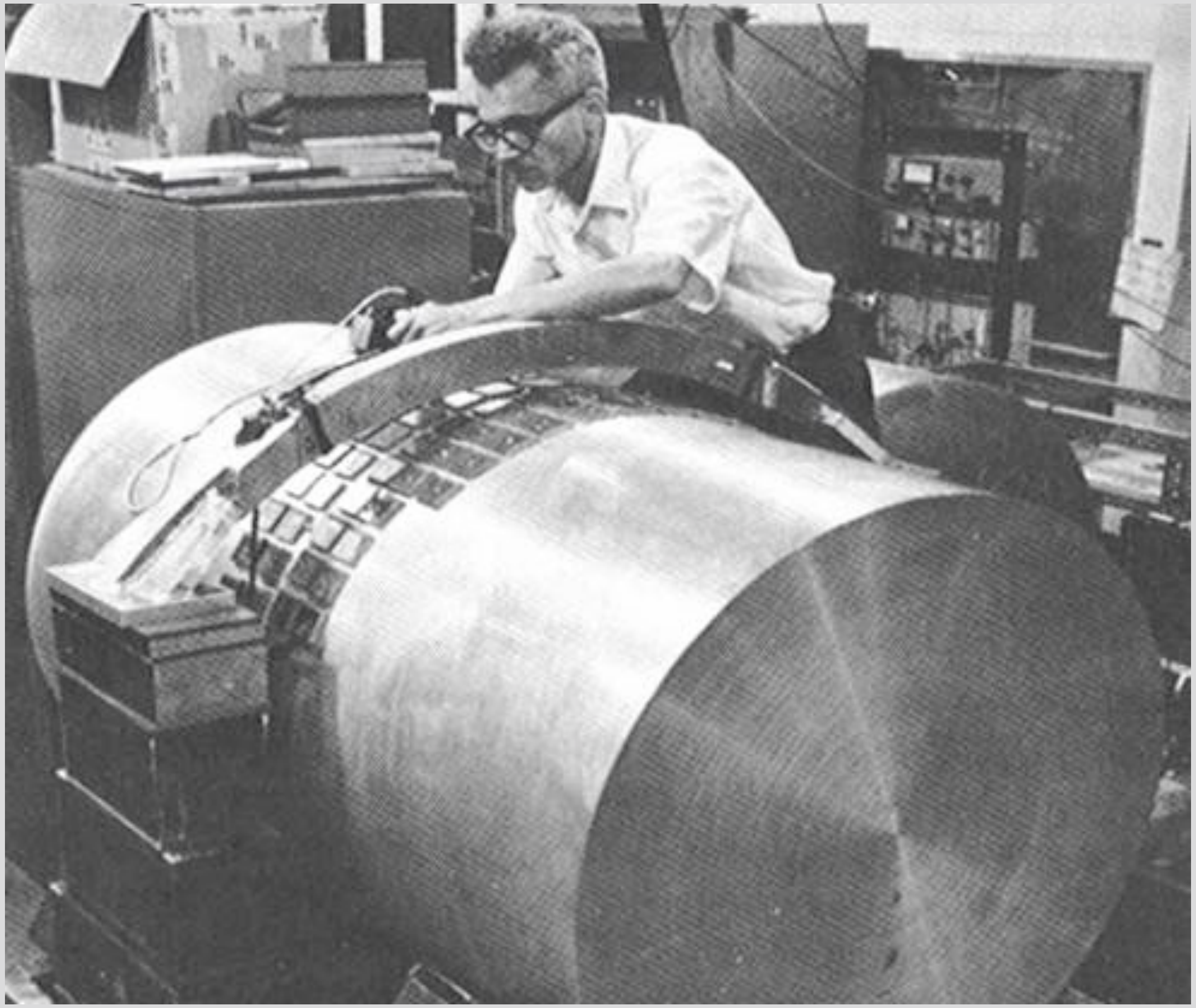
En fait, c'est subtil. La notion d'énergie gravitationnelle est très délicate à définir en relativité générale.

Longue controverse historique sur la réalité de ces ondes

#7 *ondes gravitationnelles*

barres de Weber

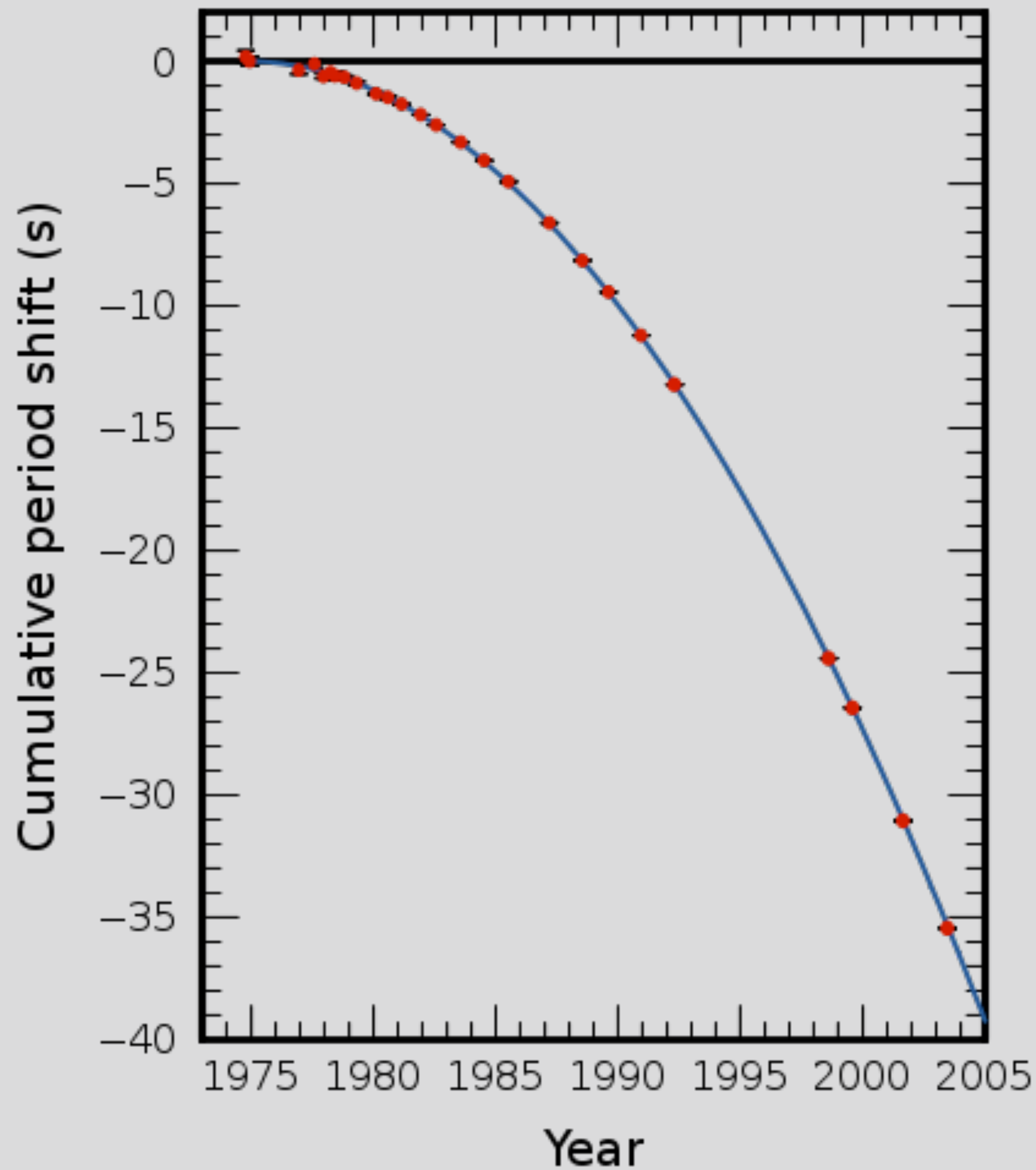
(années 1960)



#7 ondes gravitationnelles

Détection indirecte dans le pulsar binaire PSR 1913+16

Hulse et Taylor (1974)



#7 ondes gravitationnelles

#8

Tests expérimentaux

la cosmologie

#8 Cosmologie

Principe cosmologique

« À grande échelle, l'Univers est homogène et isotrope »

Métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2\right)$$

#8 Cosmologie

Expansion de l'Univers

Histoire thermique

Nucléosynthèse primordiale

Formation des grandes structures

Rayonnement de fond cosmologique

Difficultés

Manipuler des tenseurs

Singularités

Interprétation des coordonnées

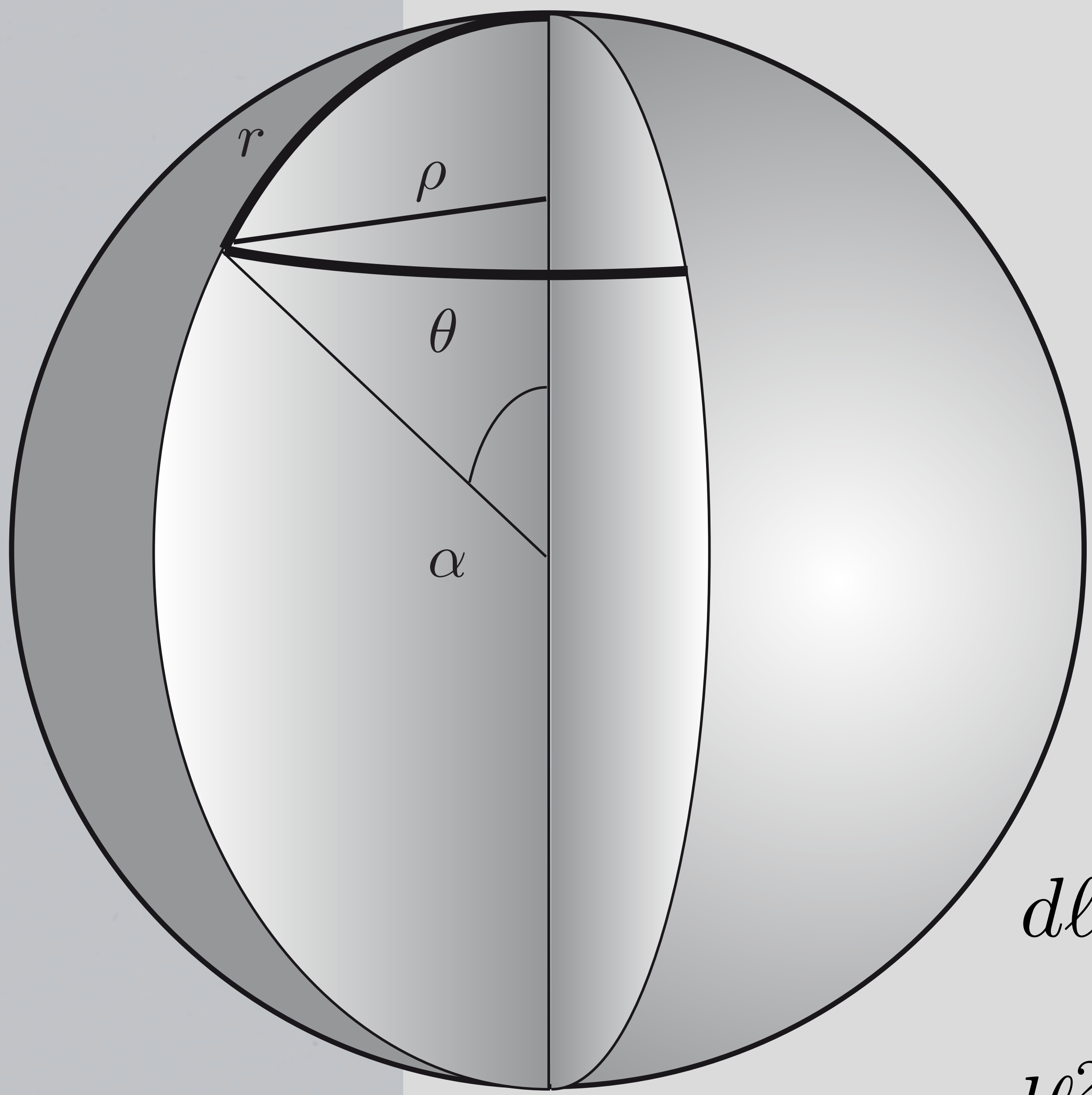
Singularités

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

quantités singulières pour deux valeurs de r :

$$r = 0 \qquad\qquad r = r_s$$

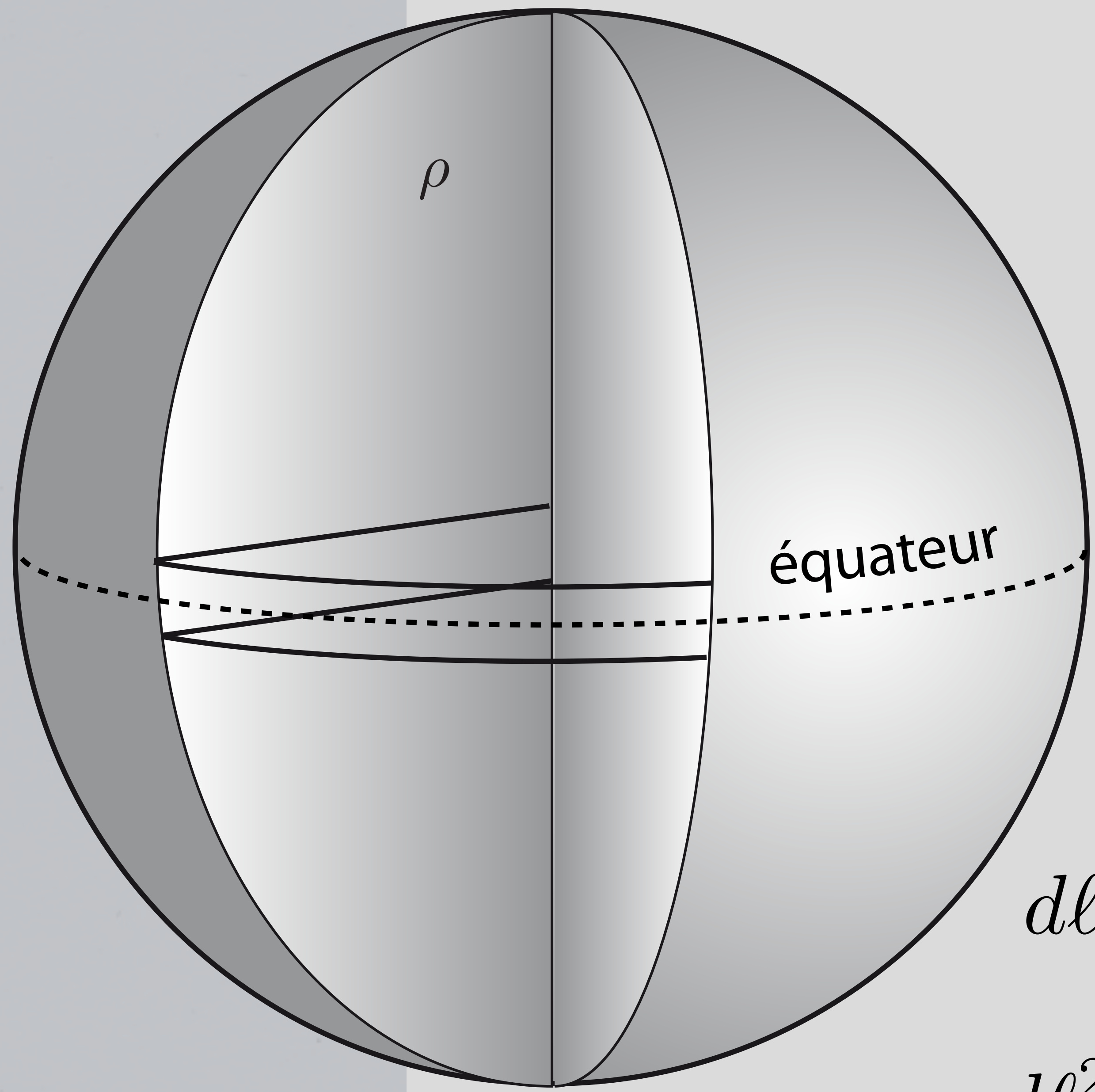
Singularités



$$d\ell^2 = R^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2\alpha \, d\theta^2$$

$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2/R^2} + (\cdots)\, d\theta^2$$

Singularités

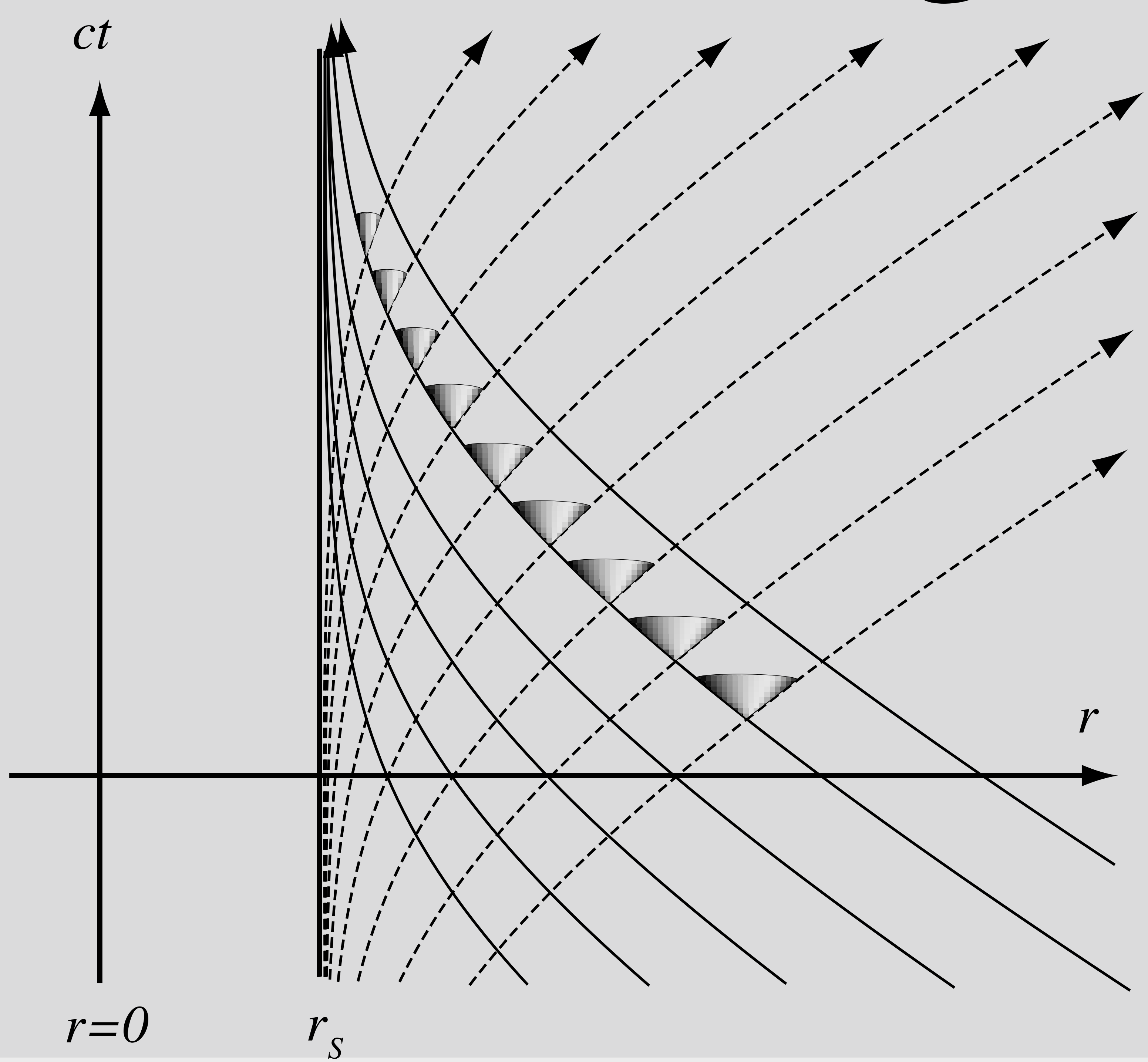


singularité de coordonnées

$$d\ell^2 = R^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2\alpha \, d\theta^2$$

$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2/R^2} + (\cdots)\, d\theta^2$$

Singularités

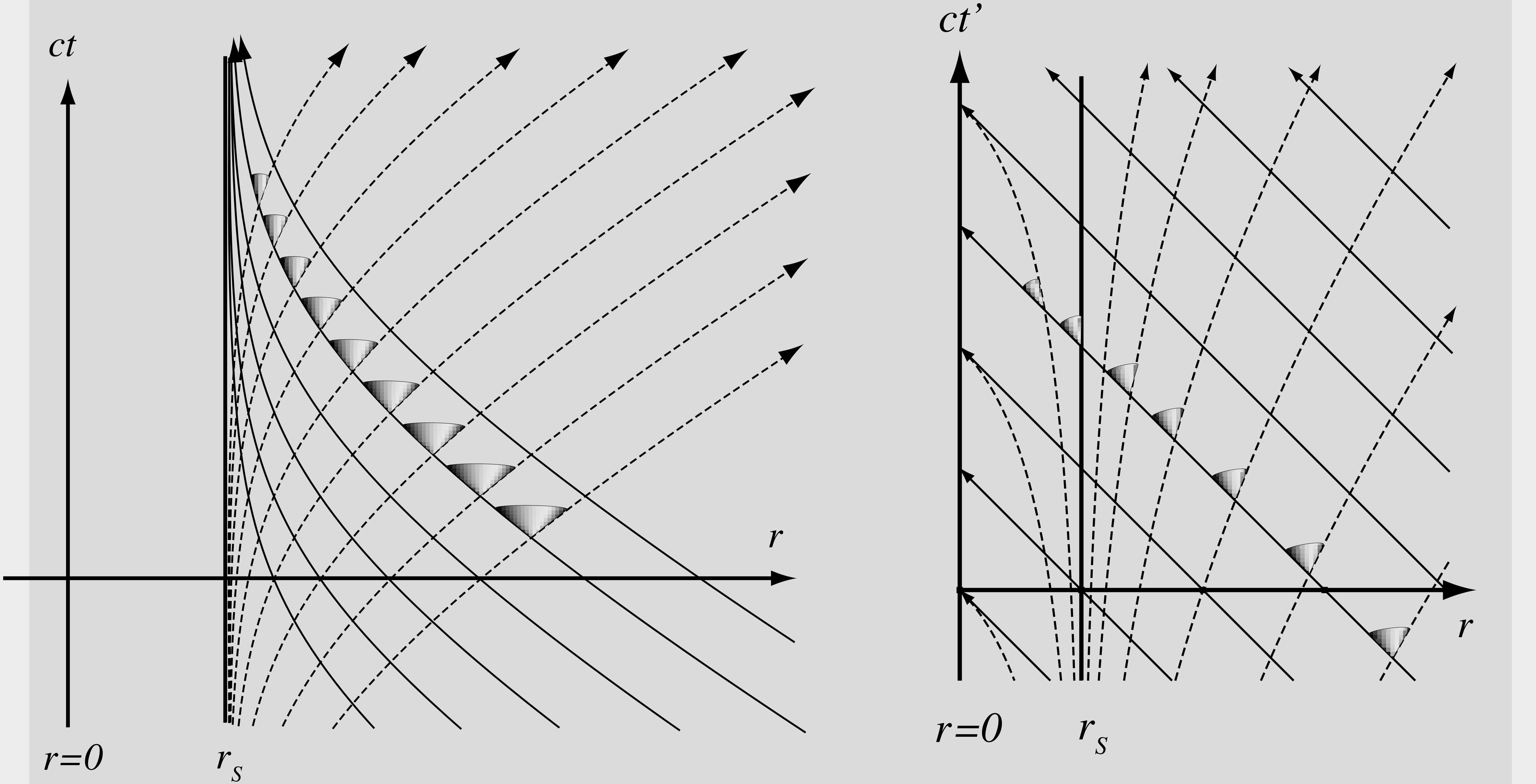


Singularités

coordonnées d'Eddington-Finkelstein

$$ct' = ct - r_s \ln\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|$$

Singularités



Coordonnées

$$ct' = ct - r_s \ln\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|$$

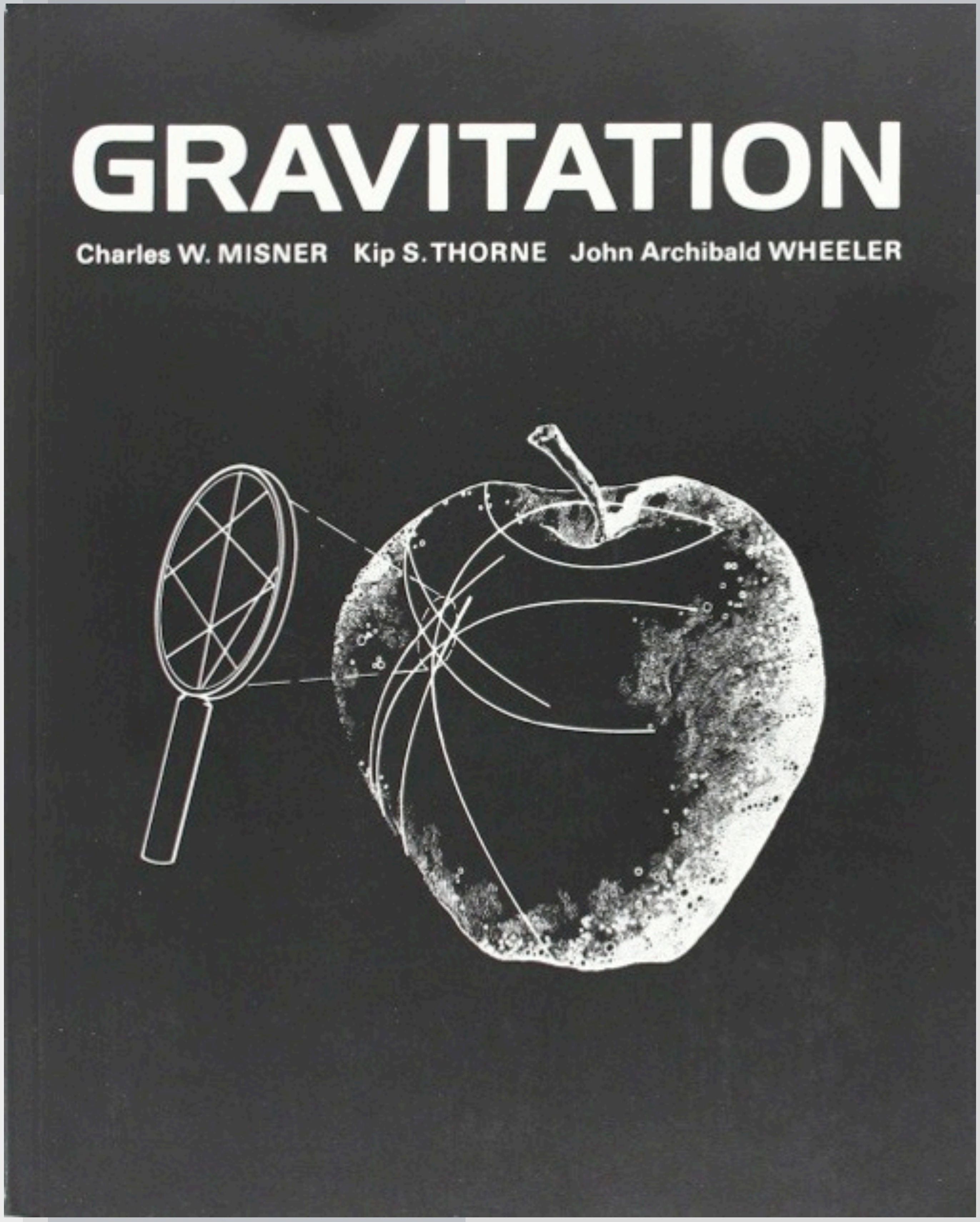
on a le droit de faire ça ?!?

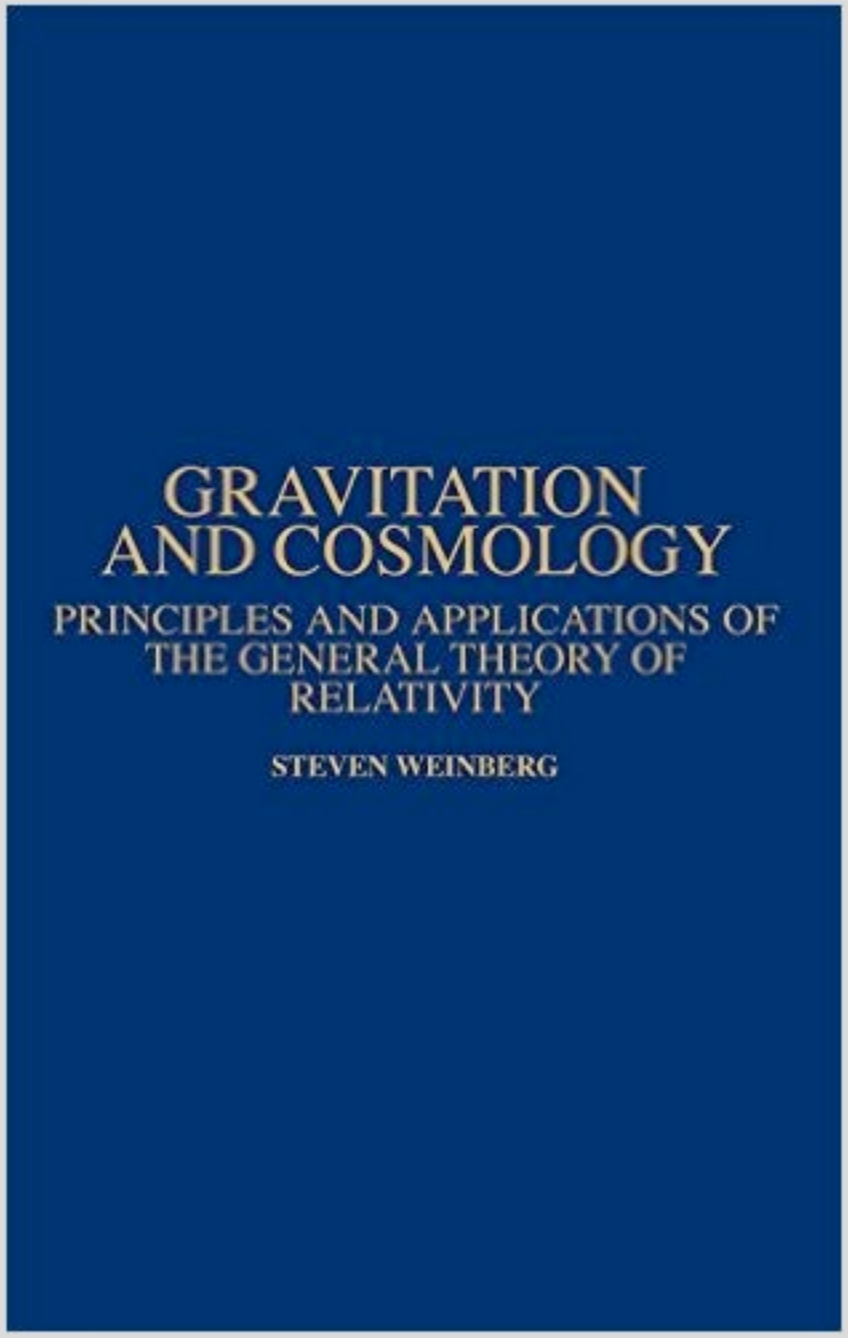
oui, les coordonnées n'ont pas de sens physique a priori

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Références

Références


GRAVITATION
Charles W. MISNER Kip S. THORNE John Archibald WHEELER


GRAVITATION AND COSMOLOGY
PRINCIPLES AND APPLICATIONS OF THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY
STEVEN WEINBERG

Références


Moore
Relativité
générale
de boeck


Hobson | Efstathiou | Lasenby
Relativité
générale
de boeck

Références

« The Confrontation between General Relativity and Experiment »

Clifford M. Will

Living Reviews in relativity

http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2006-3/

26 épisodes de 25 à 45 minutes (HD 720)

http://podcast.grenet.fr/podcast/cours-dintroduction-a-la-relativite-generale/

Contact

taillet@lapth.cnrs.fr

Richard.Taillet@univ-savoie.fr

« Dictionnaire de physique »
sur Facebook